お茶の水女子大学大学院 博士前期課程
人間文化研究科 修士論文

型付き対称ラムダ計算の基礎理論

著者氏名 ： 数理・情報科学専攻 2年 阪上 紗里

指導教官 ： 理学部 情報科学科 准教授 浅井 健一

平成 20 年 1 月

要旨

「プログラムの残りの計算」を表す継続を扱う為の基礎言語体系として、対称ラムダ計算 (Symmetric λ-calculus, SLC) が Filinski によって提案されている。SLC においては項と継続が完全に対称な形をしており、項を扱うのと同じように継続を扱うことができる。そのため、項と継続を統一的に議論するのに適していると思われるが、これまで SLC についての研究はほとんどなされていない。ここでは、まず SLC を small step semantics で定式化し直し、型付き言語の基本的な性質である Progress と Preservation を満たすことを証明する。次に、SLC が継続計算を議論・表現するのに適していることを示すため、(1) Felleisen の $\mathcal{C}$ オペレータを含む Call-by-value 言語、Λ_C 計算の Right-to-left 版と Left-to-right 版、および (2) Parigot の Call-by-name $\lambda\mu$ 計算 (の変種) が、どちらも自然に SLC に変換できることを示す。近年 Call-by-value と Call-by-name の双対性が項と継続の対称性と絡めて注目されているが、ここでの結果はそれに対する洞察を与えるものと期待される。

キーワード：対称ラムダ計算, 継続, コントロールオペレータ, $\lambda\mu$ 計算, 型

abstract

Continuations represent "the rest of the computation." We use control operators in order to manipulate continuations and represent non-local transfer of control. However, it is difficult to represent such a complex control structure in a programming language. This thesis presents a new calculus, called a symmetric λ-calculus (SLC). It is based on the calculus presented by Filinski, and deals with terms and continuations in a systematic and symmetric way. In this thesis, we formulate this system by small step semantics, and prove that SLC satisfies the basic properties of typed languages, namely progress and preservation. Then, we prove the following theorems. (1) The call-by-value SLC can simulate Felleisen's Λ_C-calculus with the control operator $\mathcal{C}$ (both a right-to-left version and a left-to-right version), and (2) the call-by-name SLC can simulate Parigot's $\lambda\mu$-calculus. These results show that SLC is suitable as a base calculus for discussing various aspects of continuations. We expect to relate this symmetry between call-by-value and call-by-name to the symmetry between terms and continuations.

Keywords : Symmetric λ-calculus, Continuation, Control Operator, $\lambda\mu$-calculus, Type

目 次

第 1 章　序論 **1**

1.1 背景と目的 1

1.2 本論文の構成 2

第 2 章　対称ラムダ計算 (SLC) **3**

2.1 SLC の構文 3

2.2 SLC の簡約規則 4

2.3 SLC の簡約規則の非決定性 7

2.4 SLC の型規則 8

第 3 章　Call-by-value Right-to-left SLC **11**

3.1 Call-by-value Right-to-left SLC の構文 11

3.2 Call-by-value Right-to-left SLC の簡約規則 12

第 4 章　Right-to-left Λ_C 計算の変換 **16**

4.1 Right-to-left Λ_C 計算の構文 16

4.2 Right-to-left Λ_C 計算の簡約規則 16

4.3 Call-by-value Right-to-left SLC への変換 17

4.4 Right-to-left Λ_C 計算の変換例 22

第 5 章　Call-by-value Left-to-right SLC **25**

5.1 Call-by-value Left-to-right SLC の構文 25

5.2 Call-by-value Left-to-right SLC の簡約規則 26

第 6 章　Left-to-right Λ_C 計算の変換 **28**

6.1 Left-to-right Λ_C 計算の構文 28

6.2 Left-to-right Λ_C 計算の簡約規則 28
6.3 Call-by-value Left-to-right SLC への変換 28
6.4 Left-to-right Λ_C 計算の変換例 30

第 7 章 Call-by-name SLC **32**
7.1 Call-by-name SLC の構文 32
7.2 Call-by-name SLC の簡約規則 33

第 8 章 $\lambda\mu$ 計算の変換 **37**
8.1 $\lambda\mu$ 計算の構文 37
8.2 $\lambda\mu$ 計算の簡約規則 37
8.3 Call-by-name SLC への変換 38
8.4 $\lambda\mu$ 計算の変換例 41

第 9 章 関連研究 **44**

第 10 章 まとめと今後の課題 **45**

謝辞 **46**

参考文献 **47**

付 録 A 証明 **A–1**
A.1 SLC に関する証明 A–1
A.1.1 SLC についての定理と補題 A–1
A.1.2 Call-by-value Right-to-left SLC の簡約の一意性 A–12
A.1.3 Right-to-left Λ_C 計算から Call-by-value Right-to-left SLC への変換についての定理と補題 A–20
A.1.4 Call-by-value Left-to-right SLC の簡約の一意性 A–24
A.1.5 Left-to-Right Λ_C 計算から Call-by-value Left-to-right SLC への変換についての定理と補題 A–32
A.1.6 Call-by-name SLC の簡約の一意性 A–35

A.1.7 $\lambda\mu$ 計算から Call-by-name SLC への変換についての定理と補題 A–43
A.2 論理関係の定義および基本定理の証明 A–48
A.2.1 Call-by-value Right-to-Left SLC における論理関係の定義および基本定理の証明 A–48
A.2.2 Call-by-value Left-to-right SLC における論理関係の定義および基本定理の証明 A–57
A.2.3 Call-by-name SLC における論理関係の定義および基本定理の証明 A–65

第1章　序論

1.1　背景と目的

例外処理など、非局所的な制御を定式化するには「プログラムの残りの計算」を表す継続が使われる。近年、継続を明示的に扱えるようにして、複雑な制御をプログラムの中で記述できるようにした言語体系が多く提案されるようになって来た。

継続を議論するための枠組みには、CPS 変換や評価文脈を使った方法がある。CPS 変換は、継続に対する特殊な枠組を用意することなく継続を表現することができるが、CPS 変換は大域的な変換であるためプログラムの構造が大きく変化してしまう。一方、評価文脈を使えば、プログラムを大きく変換することなく継続についての議論をすることができるが、評価文脈という新しい概念を導入する必要がある。

項と継続を統一的に扱う理論としては、Filinski が既に 1989 年に対称ラムダ計算 (Symmetric λ-calculus, SLC) を提案している [5]。SLC においては項と継続が完全に対称（双対）な形をしており、項を扱うのと同じように継続を扱うことができる。言わば評価文脈があらかじめ言語構文の中に組み込まれている格好である。そのため、項と継続を統一的に議論するのに適していると思われるが、これまで SLC についての研究はほとんどなされていない。そのひとつの原因は、項と継続が双対であるという概念自体は明快であるものの、SLC の定式化としては Call-by-value 版の表示的意味記述が与えられているのみであり、簡約規則がないなど言語の基本的な挙動がわかりにくく、したがって継続を扱う他のコントロールオペレータに比べて扱いにくかったことなどが考えられる。

そこで、本論文ではまず SLC を small step semantics で定式化し直し、型付き言語の基本的な性質である Progress と Preservation を満たすことを証明する。次に、SLC が継続計算を議論・表現するのに適していることを示すため、(1) Felleisen の $\mathcal{C}$ オペレータを含む Call-by-value 言

語、Λ_C 計算 [4] の Right-to-left 版および Left-to-right 版、そして (2) Parigot の Call-by-name $\lambda\mu$ 計算 [6] が、いずれも自然に SLC に変換できることを示す。

近年、Wadler の双対計算 [10] が示され、Call-by-value と Call-by-name の双対性が項と継続の対称性と絡めて注目されているが、ここでの結果はそれに対する洞察を与えるものと期待される。

1.2　本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである。次の 2 章 では（非決定的な）SLC を定式化し、型規則の健全性など基本的な性質を証明する。3 章 では Call-by-value Right-to-left SLC を導入し、4 章 で Felleisen の Right-to-left Λ_C 計算が Call-by-value Right-to-left SLC に変換できることを示す。同様に 5 章 では Call-by-value Left-to-right SLC を導入し、6 章 で Felleisen の Left-to-right Λ_C 計算が Call-by-value Left-to-right SLC に変換できることを示す。7 章 では Call-by-name SLC を導入し、8 章 で Parigot の $\lambda\mu$ 計算が Call-by-name SLC に変換できることを示す。このようにして全体を眺めると、Call-by-value については 3 章 から 6 章 について述べられているが、単に Right-to-left 版については 3 章 と 4 章 に説明し、Left-to-right 版については 5 章 と 6 章 に分けて説明しているにすぎない。つまり 3 章 で述べられている Right-to-left の SLC と 5 章 で述べられている Left-to-right の SLC はほぼ同じ記述であり、4 章 で述べられている Right-to-left Λ_C 計算の変換についてと、6 章 で述べられている Left-to-right Λ_C 計算の変換についてもほぼ同じ記述である。よって 3 章 で言える性質等は 5 章 でも言え、4 章 で言える性質等は 6 章でも言えると考えてよい。一方 Call-by-name は 7 章 および 8 章 で述べられているが、 これらは 3 章 および 4 章 の Call-by-value (Right-to-left) との対称性を見ることができる。具体的には 3 章 の Call-by-value (Right-to-left の) SLC についての記述の双対が 7 章 の Call-by-name SLC についての記述となり、4 章 の Call-by-value (Right-to-left) Λ_C 計算についての記述の双対が 8 章 の $\lambda\mu$ 計算についての記述となる。関連研究については 9 章 で述べ、10 章 でまとめる。本論文で出てくる定理および補題の証明を示した付録 A も巻末につける。

第2章　対称ラムダ計算 (SLC)

ここでは、本論文で扱う SLC の構文と簡約規則、型規則とその性質について述べる。SLC は計算を $\langle$ 継続 $|$ 項 $\rangle$ もしくは $\langle$ 継続 $|$ 関数 $|$ 項 $\rangle$ の様に表わして示す。例えば「空の継続のもと、x に引数を受け取り $x+1$ を計算する関数に、3 を渡す」という計算は $\langle \bullet \,|\, x \Rightarrow x+1 \,|\, 3 \rangle$ と表される。これは x に 3 が渡されると項部分が $\langle \bullet \,|\, 3+1 \rangle = \langle \bullet \,|\, 4 \rangle$ と変換され、空の継続に渡された 4 が最終結果に出力されるようになる。

2.1　SLC の構文

λ 計算の構文は項（と値）からなるが、SLC においては項と継続を対称に扱っているため、その構文には項以外に継続が入ってくる。さらに、関数を独立した構文として用意しているところが特徴的である。

$$
\begin{array}{rrcl}
(\text{値}) & v & ::= & x \mid \lceil f \rceil \mid n \\
(\text{項}) & e & ::= & v \mid f \uparrow e \\
(\text{関数}) & f & ::= & x \Rightarrow e \mid y \Leftarrow c \mid \overline{e} \mid \underline{c} \\
(\text{継続}) & c & ::= & k \mid c \downarrow f \\
(\text{値継続}) & k & ::= & y \mid \lfloor f \rfloor \mid \bullet
\end{array}
$$

値 v は、変数 x であるか、関数 f を値として扱うときに使う $\lceil f \rceil$ であるか、整数 n である。

項 e は、値 v であるか、関数 f を引数 e で呼び出す関数呼び出し $f \uparrow e$ である。関数呼び出しでは、引数部分は項でなくてはならないが、高階関数を使う場合など関数を引数として渡したいときには $\lceil \cdot \rceil$ を使う。例えば、λ 計算における $(\lambda x.x)\,(\lambda x.x)$ は $(x \Rightarrow x) \uparrow \lceil x \Rightarrow x \rceil$ と表される。

関数 f のところに現れる $x \Rightarrow e$ は値 x を受け取り、項 e を返す関数で λ 計算の $\lambda x.e$ に相当する。また、$\overline{e}$ は、項を関数として扱う場合に用いる。

ここまでは通常の λ 計算と同じである。SLC では、これらに加えて、その双対である継続に

関する構文が存在する。継続に関する構文は、項に関する構文の双対を（ほぼ）機械的に作ることで得ることができる。

以下に継続に関する構文を説明をする。項に関する構文は上の記述の上から順に説明したが、これとの対称性をみる為に、継続に関する構文は下から順に説明することにする。

まず値継続 k は、（継続を表す）変数 y であるか、関数 f を継続として扱うときに使う $\lfloor f \rfloor$ であるか、空の継続を表す初期継続 $\bullet$ である。初期継続については、 2.2 節 で詳しく述べる。

継続 c は、値継続 k であるか、関数 f を継続 c の前に呼び出す継続 $c \downarrow f$ (継続側の関数呼び出し) である。ここで項側の関数呼び出しであった項 $f \uparrow e$ は「項 e を関数 f に渡し、その結果をそのときの継続に渡す項」であった。これは「項 e を、関数 f に通し、継続 c に渡す」という計算の流れのうち、左側の「項 e を関数 f に通した結果得られる項」に相当する。一方、継続 側の関数呼び出しである継続 $c \downarrow f$ はその双対で、「継続 c に結果が渡る前に関数 f を実行するような継続」である。別の言い方をすると「項 e を、関数 f に通し、継続 c に渡す」という計算の流れのうち右側の「（項 e を受け取ったら）関数 f に通し、継続 c に渡すような継続」に相当する。

関数 f のところに現れる $y \Leftarrow c$ は、現在の継続を y に束縛した上で、現在の継続を c に取り替える関数である。項に関する関数 $x \Rightarrow e$ は「現在の項を x に束縛した上で、現在の項を e に取り替える関数」と思うことができる。$y \Leftarrow c$ は、その継続版で、ちょうど双対の関係にあることがわかる。$\underline{c}$ は、$\overline{e}$ の双対であり、継続を関数として扱うときに用いる。

このようにして項に関する構文は、継続に関する構文と双対の関係にあることがわかる。

2.2　SLC の簡約規則

λ 計算では計算の状態は項のみで表現されるので、簡約規則は項の間の 2 項関係として定義される。一方、SLC の計算の状態は、継続も同時に考えるため、二つ組 $\langle c \,|\, e \rangle$ または三つ組 $\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle$ という形で表される。ここで $\langle c \,|\, e \rangle$ は現在、計算しようとしている項が e で、そのときの残りの計算である継続が c であることを示す。（従来、評価文脈 E の中に現在評価を行いたい項 M がある場合、$E[M]$ と記述してきたが、直感的にはこれが $\langle E \,|\, M \rangle$ に相当する。) また、$\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle$ は現在、項 e を関数 f に渡そうとしており、そのときの継続が c であることを示している。（この説明は項に着目して書いているが、双対を考えれば継続に着目した説明も可能である。実際 $\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle$

は、継続 c を関数 f で変換しようとしており、そのときの項が e であることも示している。この着目を変更できることが、項と継続とを同等に扱えることを示唆している。）SLC の簡約規則は、このように定義される計算の状態の間の 2 項関係である。

SLC の簡約規則は次のように与えられる。なお、この段階では簡約規則は非決定的である。Call-by-value や Call-by-name などの決定的な評価戦略については次章以降で述べる。これらの簡約規則においても、項に着目する規則と継続に着目する規則の対称性を見ることができる。規則名において $\overline{\cdots}$ が付いていないものが項に着目した簡約規則で、付いているものは継続に着目した簡約規則である。

$$
\begin{array}{rrcl}
(\mathit{begin}) & e & \rightsquigarrow & \langle \bullet \,|\, e \rangle \\
(\overline{\mathit{pop}}) & \langle c \,|\, f \uparrow e \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \\
(\mathit{push}) & \langle c \,|\, f \,|\, e \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \downarrow f \,|\, e \rangle \\
(\mathit{exchange}) & \langle c \,|\, \overline{e'} \,|\, e \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \,|\, \lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e \,|\, e' \rangle \\
(\beta) & \langle c \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, e \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \,|\, e'[e/x] \rangle \\
(\overline{\beta}) & \langle c \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, e \rangle & \rightsquigarrow & \langle c'[c/y] \,|\, e \rangle \\
(\overline{\mathit{exchange}}) & \langle c \,|\, \underline{c'} \,|\, e \rangle & \rightsquigarrow & \langle c' \,|\, \lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y \,|\, e \rangle \\
(\overline{\mathit{push}}) & \langle c \,|\, f \,|\, e \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \,|\, f \uparrow e \rangle \\
(\mathit{pop}) & \langle c \downarrow f \,|\, e \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \\
(\overline{\mathit{end}}) & \langle \bullet \,|\, v \rangle & \rightsquigarrow & v
\end{array}
$$

(begin) は計算を始める規則である。計算を始めるには、与えられた項 e を空の継続で実行するように、項 e を初期継続 $\bullet$ と組み合わせた $\langle \bullet | e \rangle$ という形に簡約する。計算の終了を示すのは $(\overline{\mathit{end}})$ である。項 e の実行が終了し $\langle \bullet | v \rangle$ という形になる、つまり、値 v が得られ、それが初期継続 $\bullet$ に渡されたら、計算結果 v が返ってくる。本論文では、全体の計算結果は常に 1 階の値である整数であると仮定している。もし計算が終了した時点で、$\langle y \,|\, x \rangle$ $\langle y \,|\, \lceil f \rceil \rangle$ $\langle y \,|\, n \rangle$ $\langle \lfloor f \rfloor \,|\, x \rangle \langle \lfloor f \rfloor \,|\, \lceil f' \rceil \rangle$ $\langle \lfloor f \rfloor \,|\, n \rangle$ のような形であると型エラーとなり、プログラムは成り立たない。型エラーについては、型規則の箇所 2.4 節 で詳しく述べる。(push) と (pop) 、およびそれらの双対である $(\overline{\mathit{push}})$ と $(\overline{\mathit{pop}})$ は、計算の焦点を変更する規則である。$(\overline{\mathit{pop}})$ は、現在の項が $f \uparrow e$ だったときに f と e に分解して三つ組に変換する。(ここで $\overline{\cdots}$ が付いていることに違和感を覚えるかもしれないが、「項側から継続側に近い関数部分に項を引き戻す」というように考えると、継続側への着目の変更だととらえることができる。) 今後、焦点を関数部分か項部分に変更するかによって、f をさらに実行するか、e をさらに実行するか、あるいは（f が既に $x \Rightarrow e$ または $y \Leftarrow c$ という形だった場合に）関数適用を実行するかという評価戦略が異なってくる。(pop) は $(\overline{\mathit{pop}})$ の継続版であり、 現在の継続が $c \downarrow f$ だったときに f を継続側から関数側に引き戻して c

と分離し、三つ組に変換する。これも今後の計算の焦点がどこになるかは、評価戦略によって異なる。$(push)$ は、焦点を e に移す規則である。また、$(\overline{push})$ はこれの継続版であり、焦点を c に移す規則である。(β) は、通常の β 簡約の規則である。継続 c が不変の中、関数適用が行われている。$e'[e/x]$ は e' の中の自由な x を項 e で置き換える（capture-avoiding な）代入操作である。一方、$(\overline{\beta})$ はその双対で、継続の置き換えを行う規則である。項 e が不変の中、現在の継続 c を y に束縛した上で現在の継続が c' に変更されている。$(exchange)$ は、関数部分に出てくる項 $\overline{e'}$ を右端に移動することで e' に焦点を当てる規則である。e' の実行が終了し、$\lceil f \rceil$ の形に変換されたら、その結果を $\lceil f_x \rceil$ に受け取り、もとの引数 e を渡すような関数 $\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e$ を関数の部分に入れている。ここで $\lceil f_x \rceil \Rightarrow \cdots$ はパターンマッチであり、$\lceil f \rceil$ の形の値を受け取り、タグ $\lceil \cdot \rceil$ を外して $\cdots$ を実行する。もし項部分に $\lceil f \rceil$ 以外の値がきたらエラーとなる。$(\overline{exchange})$ は、その継続版である。ここで $\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \cdots$ も同様にパターンマッチであり、$\lfloor f \rfloor$ の形の値継続を受け取り、タグ $\lfloor \cdot \rfloor$ を外を外して $\cdots$ を実行する。継続側では継続部分に $\lfloor f \rfloor$ 以外の継続値がきたらエラーとなる。ここで表記されている f_x や f_y は f と同じだが、項側と継続側のどちらから受け取るかをわかりやすく明記するために、項側から関数 (の値表記) を受け取る場合にはパターンマッチ部分を $\lceil f_x \rceil$ とし、継続側から関数 (の値継続表記) を受け取る場合にはパターンマッチ部分を $\lfloor f_y \rfloor$ と表記する。

通常、簡約関係を定めるときには、簡約規則以外に評価文脈の規則を導入する。例えば、λ 計算であれば β 簡約を $(\lambda x.\, e')\, e \rightsquigarrow e'[e/x]$ のように定義し、この規則をどのような評価文脈の中で用いても良いと定義する。SLC では、もともと継続を明示的に扱っているため、このような評価文脈に相当する規則はなく、すべての簡約規則において継続が明示されている。評価文脈に相当する規則は、焦点を変更する規則に埋め込まれている形になっている。

簡約規則を定義したところでひとつ例を挙げる。Scheme などに存在する call/cc は SLC では次のように表現できる [5]。

$$\mathsf{call/cc} = y \Leftarrow (y \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil))$$

call/cc は、全体としては $y \Leftarrow \cdots$ という形をしていて、これは現在の継続を y に受け取るような関数である。この関数が、継続 c のもとで 1 引数関数 (の項表現)$\lceil x \Rightarrow e \rceil$ を渡される ($\langle\, c \,|\, \mathsf{call/cc} \,|\, \lceil x \Rightarrow e \rceil\, \rangle$ を上の簡約規則にしたがって実行する) と、まず現在の継続 c が y に代入され新しい継続 $c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow c \rceil)$ に置き換わる。次に、この式に $\lceil x \Rightarrow e \rceil$ が渡さ

れるので、$\lceil f_x \rceil$ には $\lceil x \Rightarrow e \rceil$ がマッチする。よって f_x は $x \Rightarrow e$ になり、これに $\lceil \_ \Leftarrow c \rceil$ が渡されるので、結局 x には $\lceil \_ \Leftarrow c \rceil$ が入ることになる。ここで $\_$ はワイルドカードで、他の場所に現れない変数を示す。この関数（の項表現）$\lceil \_ \Leftarrow c \rceil$ が現在の継続を捨てて c にジャンプする関数である。呼び出されると、現在の継続が捨てられて c に置き換わるのである。以上の簡約の様子を以下に示す。e の中では x という変数で $\lceil \_ \Leftarrow c \rceil$ にアクセスできることがわかる。さらに、継続を捕捉した後も継続部分には c が残っているので、e の中で x を使うことなく評価が終了しても、その値は c に渡されることがわかる。

$$
\begin{array}{rcll}
\langle\, c \,|\, \mathsf{call/cc} \,|\, \lceil x \Rightarrow e \rceil \,\rangle & = & \langle\, c \,|\, y \Leftarrow (y \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)) \,|\, \lceil x \Rightarrow e \rceil \,\rangle & (\mathsf{call/cc}\ \text{の定義}) \\
& \rightsquigarrow & \langle\, c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow c \rceil) \,|\, \lceil x \Rightarrow e \rceil \,\rangle & (\overline{\beta}) \\
& \rightsquigarrow & \langle\, c \,|\, \lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow c \rceil \,|\, \lceil x \Rightarrow e \rceil \,\rangle & (pop) \\
& \rightsquigarrow & \langle\, c \,|\, (x \Rightarrow e) \uparrow \lceil \_ \Leftarrow c \rceil \,\rangle & (\beta) \\
& \rightsquigarrow & \langle\, c \,|\, x \Rightarrow e \,|\, \lceil \_ \Leftarrow c \rceil \,\rangle & (\overline{pop}) \\
& \rightsquigarrow & \langle\, c \,|\, e[\lceil \_ \Leftarrow c \rceil / x] \,\rangle & (\beta)
\end{array}
$$

このように SLC では継続をふつうの項と同様に計算の対象とすることができる。

2.3　SLC の簡約規則の非決定性

上に示した簡約規則は、評価順序によって実行結果が変化する。例えば $\langle \bullet \downarrow (x \Rightarrow 2) \,|\, (y \Leftarrow \bullet) \uparrow 1 \rangle$ を考える。先に $(\overline{pop})$ を実行して $\langle \bullet \downarrow (x \Rightarrow 2) \,|\, y \Leftarrow \bullet \,|\, 1 \rangle$ としてから $(\overline{\beta})$ を実行すると $\langle \bullet \,|\, 1 \rangle$ となり 1 が返るが、先に (pop) を実行して $\langle \bullet \,|\, x \Rightarrow 2 \,|\, (y \Leftarrow \bullet) \uparrow 1 \rangle$ としてから (β) を実行すると $\langle \bullet \,|\, 2 \rangle$ となり 2 が返る。

これは SLC 自体が悪いわけではなく、実行の評価順序を定めていないために起こる問題である。実際、普通のプログラミング言語においても実行順序を定めていなければ結果は一通りには定まらない。例えば $(\lambda x.\, 1)\, (3/0)$ の結果は、値になるまで引数を簡約してから関数適用を行う Call-by-value ならエラーであり、引数が値でなくても β 簡約が行われる Call-by-name なら 1 になるのと同じことである。

SLC の実行順序については、後の 3 章 以降で具体的に触れる。その前に、以降の節では SLC の型規則とその性質について述べる。

2.4　SLC の型規則

SLC の構文が項と関数と継続の 3 種類があるのに対応して、SLC における型も項と関数と継続に関する型が、 3 種類、存在する。SLC における型は次のように定義される。

$$
\begin{array}{rlll}
 & T & ::= & T \to T' \mid T - T' \mid \mathsf{int} \\
(\text{項型}) & T_e & ::= & +T \\
(\text{関数型}) & T_f & ::= & \left\{ {}^{+T \to +T'}_{\neg T' \to \neg T} \right. \\
(\text{継続型}) & T_c & ::= & \neg T
\end{array}
$$

T は言わば「中立の」型である。$T \to T'$ は T から T' へのクロージャの型、また $T - T'$ はその双対でコンテキストの型 [5] である。$T - T'$ は $T \to T'$ の双対で $T - T' = \neg(\neg T' \to \neg T)$ と定義される。

これらの型を使って、項型は + を、継続型は ¬ をつけて表現される。直感的な意味は、$+T$ は普通の T 型のことで、$\neg T$ は「T 型の値を受け取るような継続の型」を示す。+ はなくても構わないのだが、双対の関係を明示するためにつけることにしている。関数型は $\left\{ {}^{+T \to +T'}_{\neg T' \to \neg T} \right.$ という形で表される。これで「 $+T$ 型の項を受け取って $+T'$ 型の項を返す関数の型」を表すが、同時にその双対として「 $\neg T'$ 型の継続を受け取って $\neg T$ 型の継続を返す関数の型」も表す。これらふたつの型は、実は見方が違うだけで同じ型を表している。まず項側に着目し、$+T$ 型の項を受け取って $+T'$ 型の項を返す、$+T \to +T'$ 型を持つ関数 f を考えてみよう。これは一般的な関数型であることは理解できる。項側から見るとこの関数は $+T$ 型の項 e を $+T'$ 型の項 $f \uparrow e$ に変換した上で T' 型の継続 c に結果を渡す。このようにして、項に関する関数型というのは、$+T$ 型の項を $+T'$ 型に変換する挙動を表していることがわかる。一方継続側に着目し、$\neg T'$ 型の継続を受け取って $\neg T$ 型の継続を返す、$\neg T' \to \neg T$ 型を持つ関数を考える。継続側から見るとこの関数は $\neg T'$ 型の継続 (T' 型を受け取る継続) c を $\neg T$ 型の継続 (T 型を受け取る継続) $c \downarrow f$ に変換し、その後に $+T$ 型を持つ項を受け取る。このようにして、継続に関する関数型は $\neg T'$ 型の継続を $\neg T$ 型の継続に変換する挙動を表していることがわかる。したがって、関数 f は $+T \to +T'$ という型と $\neg T' \to \neg T$ という型を併せ持っていることがわかる。これらふたつの型は、片方からもう片方を簡単に求めることができるので片方のみを書けば十分であるが、双対の関係を明示するために両方書くことにしている。

このような型の定義を使って、SLC の項、関数、継続の型規則は以下のように定義される。こ

こでも対称性は明白であり、左が項側に着目した型規則、右が継続側に着目した型規則である。

$$\Gamma, x : +T_1 \vdash x : +T_1 \quad (\text{TVar}) \qquad \Gamma, y : \neg T_2 \vdash y : \neg T_2 \quad (\overline{\text{TVar}})$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : \left\{\substack{+T_1 \to +T_2 \\ \neg T_2 \to \neg T_1}\right. \quad \Gamma \vdash e : +T_1}{\Gamma \vdash f \uparrow e : +T_2}\ (\text{TApp}) \qquad \frac{\Gamma \vdash f : \left\{\substack{+T_1 \to +T_2 \\ \neg T_2 \to \neg T_1}\right. \quad \Gamma \vdash c : \neg T_2}{\Gamma \vdash c \downarrow f : \neg T_1}\ (\overline{\text{TApp}})$$

$$\frac{\Gamma, x : +T_1 \vdash e : +T_2}{\Gamma \vdash x \Rightarrow e : \left\{\substack{+T_1 \to +T_2 \\ \neg T_2 \to \neg T_1}\right.}\ (\text{TFun}) \qquad \frac{\Gamma, y : \neg T_2 \vdash c : \neg T_1}{\Gamma \vdash y \Leftarrow c : \left\{\substack{+T_1 \to +T_2 \\ \neg T_2 \to \neg T_1}\right.}\ (\overline{\text{TFun}})$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : \left\{\substack{+T_1 \to +T_2 \\ \neg T_2 \to \neg T_1}\right.}{\Gamma \vdash \lceil f \rceil : +(T_1 \to T_2)}\ (\text{TFunClo}) \qquad \frac{\Gamma \vdash f : \left\{\substack{+T_1 \to +T_2 \\ \neg T_2 \to \neg T_1}\right.}{\Gamma \vdash \lfloor f \rfloor : \neg(T_1 - T_2)}\ (\overline{\text{TFunClo}})$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : +(T_1 \to T_2)}{\Gamma \vdash \overline{e} : \left\{\substack{+T_1 \to +T_2 \\ \neg T_2 \to \neg T_1}\right.}\ (\text{TCloFun}) \qquad \frac{\Gamma \vdash c : \neg(T_1 - T_2)}{\Gamma \vdash \underline{c} : \left\{\substack{+T_1 \to +T_2 \\ \neg T_2 \to \neg T_1}\right.}\ (\overline{\text{TCloFun}})$$

$$\Gamma \vdash n : +\mathsf{int} \quad (\text{TInt}) \qquad \Gamma \vdash \bullet : \neg\mathsf{int} \quad (\overline{\text{TInt}})$$

これらの型規則は、いずれも項と継続の双対性を念頭に置いて考えれば自然なものばかりである。特に (TApp) は関数を「項を変換するもの」と考えたときの関数呼び出しの規則で、その双対の $(\overline{\text{TApp}})$ は関数を「継続を変換するもの」と考えたときの関数呼び出しの規則である。また、(TFunClo) 等の規則は、関数が項や継続としてとらえ直せることを示す規則である。最後の $(\overline{\text{TInt}})$ の規則は、初期継続は整数を受け取る継続であるという規則である。

上記のような型規則を用いて、計算の状態に対する以下のような型規則を定義する。

$$\frac{\vdash c : \neg A \quad \vdash e : +A}{\vdash \langle\, c \,|\, e \,\rangle : +\mathsf{int}}\ (\text{TProg1}) \qquad \frac{\vdash c : \neg B \quad \vdash f : \left\{\substack{+A \to +B \\ \neg B \to \neg A}\right. \quad \vdash e : +A}{\vdash \langle\, c \,|\, f \,|\, e \,\rangle : +\mathsf{int}}\ (\text{TProg2})$$

これらの規則は、状態の中の項、関数、継続が正しい型を持っていたら、全体の計算結果は整数になることを示している。計算結果が整数になるのは、初期継続が整数を受け取ると仮定しているためである。2.2 節 で述べた型エラーとなるときは、この定義に当てはめると理解できる。以下にそれを具体的に示す。ここで「SLC の式 S が型エラーとなる」ということを、$\vdash S : \mathit{error}$ と明示する。

$$\frac{\vdash y : \neg B \quad \vdash x : +A}{\vdash \langle\, y \,|\, x \,\rangle : \mathit{error}} \qquad \frac{\vdash \lfloor f \rfloor : \neg(A - B) \quad \vdash x : +A'}{\vdash \langle\, \lfloor f \rfloor \,|\, x \,\rangle : \mathit{error}}$$

$$\frac{\vdash y : \neg B \quad \vdash x : +(A \to B')}{\vdash \langle\, y \,|\, \lceil f \rceil \,\rangle : \mathit{error}} \qquad \frac{\vdash \lfloor f \rfloor : \neg(A - B) \quad \vdash \lceil f' \rceil : +(A' \to B')}{\vdash \langle\, \lfloor f \rfloor \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle : \mathit{error}}$$

$$\frac{\vdash y : \neg B \quad \vdash n : +\mathsf{int}}{\vdash \langle\, y \,|\, n \,\rangle : \mathit{error}} \qquad \frac{\vdash \lfloor f \rfloor : \neg(A - B) \quad \vdash n : +\mathsf{int}}{\vdash \langle\, \lfloor f \rfloor \,|\, n \,\rangle : \mathit{error}}$$

一見一番最初の証明木は B と A が等しければ成り立っているように見えるが、Closed な世界を考えているので、この世界では変数はまだ自由であり、型が決まっていないので、このように言うことはできない。

このような型規則を定義すると、次のような Progress と Preservation の定理が（計算の非決定性や非合流性があるままで）成り立つ。

定理 2.4.1 (Progress)　1. $\vdash \langle c \,|\, f \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}$ ならば、ある c', f', e' が存在して $\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle$ または $\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, e' \rangle$ である。

2. $\vdash \langle c \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}$ ならば、それは $\langle \bullet \,|\, v' \rangle$ という形であるか、ある c', f', e' が存在して $\langle c \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle$ である。

定理 2.4.2 (Preservation)　1. $\vdash \langle c \,|\, f \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}$ であるとき、$\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle$ ならば $\vdash \langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle : +\mathsf{int}$ であり、$\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, e' \rangle$ ならば $\vdash \langle c' \,|\, e' \rangle : +\mathsf{int}$ である。

2. $\vdash \langle c \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}$ であるとき、$\langle c \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle$ ならば $\vdash \langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle : +\mathsf{int}$ である。

これらの定理は、いずれも簡約規則に関する簡単な場合分けで示すことができる。特に Progress は λ 計算の場合とは違い、型規則による帰納法を使わずに示すことができる。これは λ 計算におけるコンテキストまでが SLC では式に全て含んで表現することができるからである。詳しい証明は 付録 A で説明する。

以上が評価戦略を指定しない一般の SLC である。以下の章では、この SLC に制限を加える形で評価戦略を規定していく。

第3章　Call-by-value Right-to-left SLC

この章から SLC に制限を加えた評価戦略上の SLC を規定する。評価戦略を加えることで、簡約の一意性を言うことができる。まず 2 章 で示した SLC の Call-by-value SLC を示す。Call-by-value は、関数と引数がそれ以上実行できない形になってから関数適用を行う評価戦略であるが、さらにこれには (1) 関数部分よりも引数部分を先に実行する Right-to-left 版と (2) 引数部分よりも関数部分を先に実行する Left-to-right 版の 2 種類がある。この章においては、Call-by-value Right-to-left SLC を示す。Call-by-value Left-to-right SLC については 5 章 にて別に説明する。

3.1　Call-by-value Right-to-left SLC の構文

Call-by-value Right-to-left SLC の構文を以下に示す。

$$
\begin{array}{rrcl}
(\text{値}) & v & ::= & x \mid \lceil f \rceil \mid n \mid [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow v] \\
(\text{項}) & e & ::= & v \mid f \uparrow e \\
(\text{関数}) & f & ::= & x \Rightarrow e \mid y \Leftarrow c \mid \overline{e} \mid \underline{c} \\
(\text{継続}) & c & ::= & k \mid c \downarrow f \\
(\text{値継続}) & k & ::= & y \mid \lfloor f \rfloor \mid \bullet \mid [c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)]
\end{array}
$$

2 章 に示した SLC の構文と基本的に同一だが、値に $[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow v]$ が、値継続に $[c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)]$ が加わっている点のみが異なっている。これらは継続 c と値 v をパッケージ化したもので、Filinski がコンテキスト [5] と呼んでいるものである。直感的にはそれぞれ $(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow v$ と $c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)$ と同じものだが、Call-by-value Right-to-left の評価戦略に従わせるために一時的にこの関数呼び出しを凍結するために使われる。値継続のコンテキストである $[c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)]$ は Call-by-value の戦略規則においては無くても問題はない。しかし値と値継続との対称性を保つ為に、両方表記することにする。後に説明する 7 章 の Call-by-name SLC においては、この値のコンテキストと値継続のコンテキストの必要性が丁度逆になっている。コンテキストについて詳しくは 3.2 節 で簡約規則とともに説明する。

これらの構文に対する型規則は簡約にとらわれることがないので非決定性 SLC と同じ型規則を持つが、Call-by-value Right-to-left SLC では値と値継続にコンテキストが加わったので、それらに対する型規則 ($\mathrm{TContext_v}$) と ($\overline{\mathrm{TContext_v}}$) を新しく以下に与える。

$$\frac{\Gamma \vdash c : \neg B \quad \Gamma \vdash v : +A}{\Gamma \vdash [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow v] : +(A - B)}\ (\mathrm{TContext_v})$$

$$\frac{\Gamma \vdash c : \neg B \quad \Gamma \vdash v : +A}{\Gamma \vdash [c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] : \neg(A \to B)}\ (\overline{\mathrm{TContext_v}})$$

これらは以下の様にして求めることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma, f_y : \left\{\substack{+A\to+B \\ \neg B\to\neg A}\right. \vdash f_y : \left\{\substack{+A\to+B \\ \neg B\to\neg A}\right.}}{\Gamma, \lfloor f_y \rfloor : \neg(A - B) \vdash f_y : \left\{\substack{+A\to+B \\ \neg B\to\neg A}\right.} \quad \Gamma, \lfloor f_y \rfloor : \neg(A - B) \vdash c : \neg B}{\Gamma, \lfloor f_y \rfloor : \neg(A - B) \vdash c \downarrow f_y : \neg A}}{\Gamma \vdash \lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y : \left\{\substack{+A\to+(A-B) \\ \neg(A-B)\to\neg A}\right.} \quad \Gamma \vdash v : +A}{\Gamma \vdash [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow v] : +(A - B)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma, f_x : \left\{\substack{+A\to+B \\ \neg B\to\neg A}\right. \vdash f_x : \left\{\substack{+A\to+B \\ \neg B\to\neg A}\right.}}{\Gamma, \lceil f_x \rceil : +(A \to B) \vdash f_x : \left\{\substack{+A\to+B \\ \neg B\to\neg A}\right.} \quad \Gamma, \lceil f_x \rceil : +(A \to B) \vdash v : +A}{\Gamma, \lceil f_x \rceil : +(A \to B) \vdash f_x \uparrow v : +B}}{\Gamma \vdash \lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v : \left\{\substack{+(A\to B)\to+B \\ \neg B\to\neg(A\to B)}\right.} \quad \Gamma \vdash c : \neg B}{\Gamma \vdash [c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] : \neg(A \to B)}$$

この証明木について言及しておきたいことがいくつかある。まず、どちらの証明木も下から二段目においてコンテキストの [ ] がはずれ、それぞれの中身である $(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow v$ および $c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)$ の証明木となっている点である。この理由は、型規則は評価戦略とは独立して成り立つので、コンテキスト自身とその [ ] でくくられた内容はどちらも同じ型を持つからである。次に、環境の中に出てくる $\Gamma, \lfloor f_y \rfloor : \neg(A - B)$ および $\Gamma, \lceil f_x \rceil : +(A \to B)$ であるが、これは環境の中でもそれぞれが成り立っている場合は、それぞれ $\Gamma, f_x : \left\{\substack{+A\to+B \\ \neg B\to\neg A}\right.$ および $\Gamma, f_y : \left\{\substack{+A\to+B \\ \neg B\to\neg A}\right.$ として良いことにする。このようにして組み上がった証明木を見ると、$\Gamma \vdash c : \neg B$ と $\Gamma \vdash v : +A$ が成り立てば良いことがわかり、($\mathrm{TContext_v}$) と ($\overline{\mathrm{TContext_v}}$) の型規則の条件を得ることができる。

3.2　Call-by-value Right-to-left SLC の簡約規則

Call-by-value Right-to-left SLC の簡約規則を以下に示す。基本的には、2 章 に示した SLC の簡約規則から非決定性を取り除いて、Call-by-value Right-to-left の評価戦略にしたがって評価され

るように変更したものである。規則名に $_\mathrm{v}$ がついているものは、2 章 の簡約規則から変更されている。

$$
\begin{array}{rrcl}
(\mathit{begin}) & e & \rightsquigarrow & \langle \bullet \,|\, e \rangle \\
(\overline{\mathit{pop}}) & \langle c \,|\, f \uparrow e \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \\
(\mathit{push}_\mathrm{v}) & \langle c \,|\, f \,|\, f' \uparrow e \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \downarrow f \,|\, f' \uparrow e \rangle \\
(\mathit{context}_\mathrm{v}) & \langle [c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, \lceil f \rceil \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \,|\, f \,|\, v \rangle \\
(\mathit{exchange}_\mathrm{v}) & \langle c \,|\, \overline{e} \,|\, v \rangle & \rightsquigarrow & \langle [c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, e \rangle \\
(\beta_\mathrm{v}) & \langle c \,|\, x \Rightarrow e \,|\, v \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \,|\, e[v/x] \rangle \\
(\overline{\beta}_\mathrm{v}) & \langle c \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, v \rangle & \rightsquigarrow & \langle c'[c/y] \,|\, v \rangle \\
(\overline{\mathit{exchange}}_\mathrm{v}) & \langle c \,|\, \underline{c'} \,|\, v \rangle & \rightsquigarrow & \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow v] \rangle \\
(\overline{\mathit{context}}_\mathrm{v}) & \langle \lfloor f \rfloor \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow v] \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \,|\, f \,|\, v \rangle \\
(\mathit{pop}_\mathrm{v}) & \langle c \downarrow f \,|\, v \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \,|\, f \,|\, v \rangle \\
(\overline{\mathit{end}}) & \langle \bullet \,|\, v \rangle & \rightsquigarrow & v
\end{array}
$$

以下に Call-by-value Right-to-left SLC における簡約規則およびその挙動を説明する。Call-by-value の評価戦略は、引数である項部分が値になり、さらに関数部分がそれ以上実行できない形 (具体的に言えば $x \Rightarrow c$ と $y \Leftarrow c$ の形) になって初めて関数適用が行われる。そしてこの戦略に Right-to-left の制限を加え、関数部分より引数の項部分を先に実行するようにしている。すなわち、項部分を先に評価し値になったら、関数部分を評価しにいく挙動となっている。

まず、プログラム e が与えられると非決定性 SLC と同様に、初期継続とともに $\langle \bullet \,|\, e \rangle$ の形から実行するように簡約される。引数部分 (項部分) を評価するため、まず $(\overline{\mathit{pop}})$ を使って関数呼び出しを関数と項に分解する。分解後、項部分がまだ値ではなく、関数呼び出しだった場合には $(\mathit{push}_\mathrm{v})$ を使って関数を継続側におしやり、さらに項部分を $(\overline{\mathit{pop}})$ を使って実行していく。$(\overline{\mathit{pop}})$ により項部分が値になったら、次に関数部分に焦点を移して関数を評価していく。これが Right-to-left の挙動になる。

関数部分に焦点が移った際に、関数部分がそれ以上実行できない関数の値 ($x \Rightarrow e$ と $y \Leftarrow c$ の形) になっていない場合、$(\mathit{exchange}_\mathrm{v})$ を使って関数部分を (項側で) 実行する。その関数部分を実行し $\lceil\cdot\rceil$ に評価されると、$(\mathit{context}_\mathrm{v})$ によって評価された関数を再び関数部分に戻し、三つ組にして実行を続ける。このような流れで引数部分である項が値になり、関数部分がそれ以上実行できない関数になって、初めて関数適用の β 簡約が行われる。これが Call-by-value の挙動となっている。

$(\mathit{pop}_\mathrm{v})$ は、β 簡約の結果などで二つ組の項部分がすでに値になっていたときに、関数部分を継続から引き戻すのに使う。

以上のようにCall-by-value Right-to-left SLCの評価戦略では項部分が先に実行されるため、項についての関数 $x \Rightarrow e$ を β 簡約するときには必ず引数部分の項は値になる。しかし、その双対である $y \Leftarrow c'$ を β 簡約するときには、その引数である継続は値継続になっているとは限らない。したがって、$(\overline{\beta}_{\mathrm{v}})$ は（項部分は値になっているが）本質的には $(\overline{\beta})$ と同じである。同様のことが $(\overline{exchange}_{\mathrm{v}})$ についても言える。項部分を実行してみたが、関数部分が $\underline{c'}$ という形をしていたら、結局、この部分を実行せざるを得ない。よって、継続 c を一時的に項の方へ押しやり、c' の実行を開始している。ここで注目すべきことは、規則の右辺が非決定性SLCの簡約規則である $(\overline{exchange})$ のように $\langle\, c' \,|\, \lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y \,|\, v \,\rangle$ とはなっておらず、$\langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow v] \,\rangle$ となっていることである。これは $\langle\, c' \,|\, \lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y \,|\, v \,\rangle$ としてしまうと c' がまだ $\lfloor f \rfloor$ という形をしていない場合、継続部分を評価しなくてはいけないが、Call-by-value の評価戦略では二つ組の項部分が値になって初めて継続部分に焦点があたる。そこで c や v を一時的に忘れて継続部分を先に評価するために、関数部分を項側におしやり、さらに値としてパッケージ化しておく。これによって継続部分に焦点があたり、c' が評価される。c' が $\lfloor f \rfloor$ という形に評価されたときに初めて $(\overline{context}_{\mathrm{v}})$ を使って $\langle\, c \,|\, f \,|\, v \,\rangle$ に戻すようになる。それ以外ではパッケージ化されたまま実行が進む。なお、$[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow v]$ は Filinski がコンテキストと呼んでいるものに対応する [5]。この双対の $(exchange_{\mathrm{v}})$ は実は Call-by-value においてはコンテキストにする必要がないが、$(\overline{exchange}_{\mathrm{v}})$ の双対として表すためにコンテキストに変換する。

以上が Call-by-value Right-to-left SLC の評価規則である。ここには $(\overline{push})$ が現れていないが、Call-by-value Right-to-left SLC では常に項部分が先に計算されるので、項の部分を保留して継続部分を評価にいく $(\overline{push})$ は不要である。

コンテキストが導入されているために、Call-by-value Right-left SLC は 2 章 の SLC の枠組を逸脱しているように思うかもしれないが、そうではない。コンテキストは、単に評価順序を規定するためのみに導入されており、Call-by-value Right-to-left SLC の簡約は、すべて 2 章 の SLC の簡約の一部になっている。以下に Call-by-value Right-to-left SLC における簡約規則のまとめ

を記しておく。

$(begin)$	$\cdots$	計算をスタートさせる規則。
$(\overline{pop})$	$\cdots$	関数と項を分解する規則。
$(push_{\mathrm{v}})$	$\cdots$	項部分がまだ値になっていないので関数を継続側におしやり、 項部分をさらに評価しにいく規則。
$(context_{\mathrm{v}})$	$\cdots$	項側で計算した関数を再び関数部分に戻す規則。
$(exchange_{\mathrm{v}})$	$\cdots$	焦点を項部分から関数にあて、その関数を項側で計算する規則。 Right-to-left の特徴を表している。
(β_{v})	$\cdots$	β簡約をする規則。Call-by-value の特徴を表している。
$(\overline{\beta}_{\mathrm{v}})$	$\cdots$	継続側のβ簡約である。
$(\overline{exchange}_{\mathrm{v}})$	$\cdots$	焦点を継続部分から関数にあて、その関数を継続側で評価する規則。
$(\overline{context}_{\mathrm{v}})$	$\cdots$	$(exchange_{\mathrm{v}})$の継続版で、継続側で計算をした関数を再び関数部分に戻す規則。
(pop_{v})	$\cdots$	項部分が値になったので、継続側から関数を引き戻す規則。
$(\overline{end})$	$\cdots$	計算を終了する規則。

Call-by-value Right-to-left SLC の簡約規則についても、2 章 の簡約規則とほぼ同様にして Progress と Preservation の性質が成り立つことを示すことができる。さらに Call-by-value Right-to-left SLC の簡約規則の定義を調べると以下の命題が成り立つことが簡単にわかる。

命題 3.2.1 Call-by-value Right-to-left SLC の簡約は型を持つならば一意的である。

付録 A にて証明の詳細を説明する。

簡約の一意性が示されると、状態の等価性を定義することができる。

定義 3.2.2 ふたつの状態 s_1 と s_2 （いずれも $\langle c \,|\, e \rangle$ または $\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle$ という形）は、同じ値に簡約されるときに等価であるといい $s_1 \approx s_2$ と書く。

$$s_1 \approx s_2 \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \text{ある } v \text{ が存在して } s_1 \rightsquigarrow^* v \wedge s_2 \rightsquigarrow^* v$$

第4章　Right-to-left Λ_C 計算の変換

Call-by-value SLC は Call-by-value の言語に継続を扱う命令が入った体系を議論・表現するのに適している。ここでは、その具体例として Felleisen による Λ_C 計算 [4] を Call-by-value SLC に変換できることを示す。この Λ_C 計算にも (1) 関数部分よりも引数部分を先に実行する Right-to-left 版と (2) 引数部分よりも関数部分を先に実行する Left-to-right 版の 2 種類がある。この章では 3 章 で紹介した Call-by-value Right-to-left SLC への Right-to-left Λ_C の変換について言及する。

4.1　Right-to-left Λ_C 計算の構文

まず Felleisen の Right-to-left Λ_C 計算の構文を次に示す。Λ_C 計算とは、λ 計算に継続を扱うコントロールオペレータ $\mathcal{C}$ を追加したものである。$\mathcal{C}$ の意味については、次の節で簡約規則とともに述べる。

$$
\begin{array}{rrcl}
(\text{値}) & V & ::= & x \mid \lambda x.\, M \mid \mathcal{C} \\
(\text{項}) & M & ::= & V \mid M\, M' \\
(\text{評価文脈}) & E & ::= & [\,] \mid E[F] \\
(\text{フレーム}) & F & ::= & M\;[\,] \mid [\,]\; V
\end{array}
$$

$E[F]$ とは評価文脈の中に、評価戦略を規定するフレームを伴うものである。フレームが $M\;[\,]$ のように引数部分が評価できる評価文脈になっている場合はまず引数部分を先に実行し、$[\,]\;V$ のように引数部分が値になってから関数部分が評価される挙動を示す。

4.2　Right-to-left Λ_C 計算の簡約規則

Right-to-left Λ_C 計算の簡約規則は次のふたつからなる。

$$
\begin{array}{rcl}
E[(\lambda x.\, M)\, V] & \rightsquigarrow & E[M[V/x]] \\
E[\mathcal{C}\, V] & \rightsquigarrow & V\,(\lambda x.\, \mathcal{A}\,(E[x]))
\end{array}
$$

最初の簡約規則は通常の Call-by-value の β 簡約で、ふたつ目の簡約規則が $\mathcal{C}$ の動作を示す規則である。$\mathcal{C}$ に値 V （典型的には $\lambda k.\,M$ の形）が渡されると、次のふたつのことが行われる。まず第一に、そのときの評価文脈、すなわちそのときの継続である $E[\;]$ が $\lambda x.\,\mathcal{A}\,(E[x])$ という普通の関数の形に変換され V に渡される。V が $\lambda k.\,M$ という形をしていれば、以後、M の中で k という変数を通してその評価文脈を自由に使うことができるようになる。この k に渡される関数は、$\mathcal{C}\,V$ が実行されたときの継続を表す。実際、$\lambda x.\,\mathcal{A}\,(E[x])$ に引数を渡すと、 それは $\mathcal{C}\,V$ が適用された際の $E[\;]$ という評価文脈の中で実行される。$E[\;]$ を囲んでいる $\mathcal{A}$ は Abort のことである。これは、そのときの評価文脈を捨てるコントロールオペレータであり、$\mathcal{A}\,M \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{C}\,(\lambda\_.\,M)$ と定義される。

$\mathcal{C}$ に値 V を渡したときに行われるもうひとつのことは、そのときの評価文脈 (そのときの継続) の廃棄である。$E[\mathcal{C}\,V]$ の評価結果を見ると、全体が $E[\;]$ では囲まれていない。これは V の中で評価文脈を明示的に使用しなかった場合、この評価文脈は捨てられることを意味している。これは、評価文脈を使用しなくても返って来た値が評価文脈に渡される call/cc とは対照的である。

4.3　Call-by-value Right-to-left SLC への変換

この節では Right-to-left Λ_C 計算から Call-by-value Right-to-left SLC への変換規則を示す。与えられた Right-to-left Λ_C 計算の式 (項) M は、まず次の規則で Call-by-value Right-to-left SLC の式に変換される。

$$T[\![M]\!] \;=\; \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![M]\!]\,\rangle$$

変換後の式を見ると、 M は $T_e[\![\cdot]\!]$ によって変換された結果を初期継続 $\bullet$ のもとで実行するような状態に変換されている。$T_e[\![\cdot]\!]$ は、 Right-to-left Λ_C 計算の項を Call-by-value Right-to-left SLC の項に変換する関数である。これは、 Right-to-left Λ_C 計算の項を対応する Call-by-value

Right-to-left SLC の関数に変換する $T_f[\![\cdot]\!]$ とともに以下のように定義される。

$$
\begin{array}{rcl}
T_e[\![x]\!] & = & x \\
T_e[\![\lambda x.\,M]\!] & = & \lceil x \Rightarrow T_e[\![M]\!] \rceil \\
T_e[\![M\,N]\!] & = & T_f[\![M]\!] \uparrow T_e[\![N]\!] \\
T_e[\![\mathcal{C}]\!] & = & \lceil y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)] \rceil \\[6pt]
T_f[\![x]\!] & = & \overline{x} \\
T_f[\![\lambda x.\,M]\!] & = & x \Rightarrow T_e[\![M]\!] \\
T_f[\![M\,N]\!] & = & \overline{T_f[\![M]\!] \uparrow T_e[\![N]\!]} \\
T_f[\![\mathcal{C}]\!] & = & y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]
\end{array}
$$

変数 x、λ 抽象 $\lambda x.\,M$ については、対応する Call-by-value Right-to-left SLC の項に変換しているだけである。関数呼び出し $M\,N$ についてもほぼそのままであり、関数部分 M を関数用の $T_f[\![\cdot]\!]$ で変換したものと、項部分 N を項用の $T_e[\![\cdot]\!]$ で変換したものを適用させた形になる。次の $T_e[\![\mathcal{C}]\!]$ が $\mathcal{C}$ の挙動を定義している規則である。$\mathcal{C}$ は「そのときの継続 y を値継続 $[\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]$ で置き換える関数」として実現される。y を受け取った際に置き換わる継続は、値継続のコンテキストではなく $\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)$ としても Call-by-value では問題はない。しかし、3 章 で示した構文にあわせるため $[\cdots]$ でくくり、コンテキストにする。置き換わる値継続のコンテキストの内容を見ると、基本的には初期継続 $\bullet$ であるので現在の継続がリセットされていることがわかる。しかし、初期継続に値を渡す前に $\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil$ が実行されるようになっている。この関数は、引数 $\lceil f_x \rceil$ を受け取ったら、そのタグ $\lceil \cdot \rceil$ をはずし、その関数 f_x に $\lceil \_ \Leftarrow y \rceil$ つまり「$\mathcal{C}$ が実行された時点での継続の関数表現」、より正確には「その時点での継続を捨てて、y に置き換えるような関数」を渡す。

$T_e[\![\mathcal{C}]\!]$ の定義は call/cc の定義にとても似ていることがわかる。実際 call/cc の定義は (値継続のコンテキストは Call-by-value においては無くてもかまわないのでそのまま外すことができると思うと) $T_e[\![\mathcal{C}]\!]$ の $\bullet$ の部分が y になっているだけである。$\bullet$ の部分が y になることは、call/cc がそのときの継続を複製した上で引数に渡すのに対し、$\mathcal{C}$ はそのときの継続を取り除いて引数に渡しているためである。SLC による定義は両者の特徴をよく表していることがわかる。

$T_e[\![M\,N]\!]$ の定義の中で使われている $T_f[\![M]\!]$ は M を関数として変換するために、$T_e[\![M]\!]$ の変換において $\lceil \cdot \rceil$ のつく λ 抽象 $\lambda x.\,M$ および $\mathcal{C}$ の変換は、$T_e[\![\cdot]\!]$ の $\lceil \cdot \rceil$ を外した形となり、それ以外のタグが付かないものに関しては $\bar{\cdot}$ を付加した形というだけで、ほぼ $T_e[\![M]\!]$ と同じ変換内容になっている。

以上で Right-to-left Λ_C の式 (項) M を Call-by-value Right-to-left SLC の式に変換することが

できた。変換規則をみると、$\underline{c}$ や $\lfloor f \rfloor$ が現れることはない。これは Λ_C 計算が、項によって継続を表現しているためであると思われる。しかし、この変換が簡約規則を保存することを示そうと思うと、単に M を $\langle \bullet \,|\, T_e[\![M]\!] \rangle$ の形に変換するだけでなく、任意の評価文脈 $E[\;]$ と、その中にある項 M を上手に Call-by-value Right-to-left SLC の状態に変換する必要が出てくる。そこで、上の $T_e[\![\cdot]\!]$ と $T_f[\![\cdot]\!]$ に加えて、次の $T_c[\![\cdot]\!]$ を（$T_F[\![\cdot]\!]$ を使って）定義する。

$$
\begin{array}{rcl}
T_c[\![[\;]]\!] & = & \bullet \\
T_c[\![E[F]]\!] & = & (F = M\ [\;] \text{ の場合})\ T_c[\![E]\!] \downarrow T_F[\![F]\!] \\
 & & (F = [\;]\ V \text{ の場合})\ [T_c[\![E]\!] \downarrow (T_F[\![F]\!])] \\
T_F[\![M\ [\;]]\!] & = & T_f[\![M]\!] \\
T_F[\![[\;]\ V]\!] & = & \lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![V]\!]
\end{array}
$$

これらは、評価文脈とフレームをそれぞれ対応する Call-by-value Right-to-left SLC の継続と関数に変換する規則である。空の評価文脈は初期継続 $\bullet$ に変換され、フレームの列は評価文脈の前に実行する関数の列になる。評価文脈が $E[F]$ で、なおかつフレームが $M\ [\;]$ の場合は評価文脈の前に $T_f[\![M]\!]$ を実行するように変換する。評価文脈が $E[F]$ で、なおかつフレームが $[\;]\ V$ の場合は Right-to-left の評価戦略を用いているため先に関数部分を計算し、$T_e[\![V]\!]$ を後で適用するような関数に変換される。さらにこのとき、変換の全体は $[\cdots]$ でくくられ値継続のコンテキストとなる。Call-by-value においてはコンテキストにしなくても良いが、3 章 の構文に合わせるためにこのようにしている。後の 8 章 において出てくる $\lambda\mu$ 計算から Call-by-name SLC への変換では、常にコンテキストを伴った変換が必要となっている。

　このように定義をすると、次の重要な補題を評価文脈 E の構造に関する帰納法により示すことができる。

補題 4.3.1 $\langle \bullet \,|\, T_e[\![E[M]]\!] \rangle \approx \langle T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \rangle$

この補題は、評価文脈 $E[\;]$ と項 M が SLC の世界では継続と項にきれいに分離できることを示している。この補題を使うと、これまでの $E[(\lambda x.\, M)\, V] \rightsquigarrow E[M[V/x]]$ といった簡約規則は、評価文脈 $E[\;]$ を継続部分に分離することで従来と同じく $(\lambda x.\, M)\, V \rightsquigarrow M[V/x]$ の部分に着目した議論をすることができるとともに、$E[\mathcal{C}\, V] \rightsquigarrow V\,(\lambda x.\, \mathcal{A}\,(E[x]))$ のようにコンテキストを巻き込んだ規則についても議論ができるようになる。

　なお、上の補題は M が値の場合にはより強い $\langle \bullet \,|\, T_e[\![E[V]]\!] \rangle \rightsquigarrow^* \langle T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![V]\!] \rangle$ という関係が成り立つことを証明できる。しかし、M が値でないときには途中で逆の簡約をしなければならないことがあるため、この強い関係は値以外の M については一般には成り立たない。

上の補題を使うと、$T[\![\cdot]\!]$ による変換が Right-to-left Λ_C 計算の簡約規則で保存されていることを示すことができる。

定理 4.3.2 Right-to-left Λ_C 計算の式 M について $M \leadsto N$ が成り立ち、かつ $\vdash T[\![M]\!] : +\mathsf{int}$ なら、$T[\![M]\!] \approx T[\![N]\!]$ が成り立つ。

証明の概略

$M \leadsto N$ についての場合分けを行う。$E[(\lambda x.\, M)\, V] \leadsto E[M[V/x]]$ の場合は、ほぼ従来通りの証明を行うことができる。補題 4.3.1 により評価文脈 $E[\ ]$ は継続部分に分離できるので、$\langle T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![(\lambda x.\, M)\, V]\!] \rangle$ と $\langle T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![M[V/x]]\!] \rangle$ が同じ値になることを言えば良い。それには $T_e[\![(\lambda x.\, M)\, V]\!]$ の定義を展開して、簡約をした上で、次の代入補題を使う。

補題 4.3.3 (Call-by-value Right-to-left SLC の代入補題) $T_e[\![M]\!][T_e[\![V]\!]/x] = T_e[\![M[V/x]]\!]$

この代入補題自身は、M の構造に関する帰納法より証明できる。

一方、$E[\mathcal{C}\, V] \leadsto V\, (\lambda x.\, \mathcal{A}\, (E[x]))$ の場合は、多少、複雑になる。まず、簡約前の式 (項) と後の式 (項) をそれぞれ $T[\![\cdot]\!]$ で変換し、補題 4.3.1 を使いながら簡約する。すると、両者、似たような格好の状態になるが、一部、変数に代入される値が異なった格好になる。したがって、この格好の異なったふたつの値があらゆる評価文脈の中で等しく振る舞うことを示さなくてはならない。

通常の λ 計算であれば β 等価性があるので、簡単にそのような議論を行うことができるが、SLC では等価性の概念は定義されておらず、あるのは簡約規則だけである。ふたつの値があらゆる評価文脈の中で等しく振る舞うことを示すため、我々は住井らの方法 [9] にならって SLC に対する論理関係を型に関する帰納法で定義し、論理関係の基本定理を証明した。それを使うと、そこから文脈等価性を導くことができ、ふたつの値の等価性を証明することができる。この論理関係の定義および、論理関係の基本定理の詳細については付録 A にて説明する。 $\square$

上の定理は Right-to-left Λ_C の世界で簡約をしても変換した Call-by-value SLC の世界で型がついていたら、$\approx$ である関係が崩れないことを示している。この定理から次の系を導くことができる。

系 4.3.4 Right-to-left Λ_C 計算の式 M について $M \leadsto^* V$ が成り立ち、かつ $\vdash T[\![M]\!] : +\mathsf{int}$ なら、$T[\![M]\!] \leadsto^* T[\![V]\!]$ が成り立つ。

これは以下のように示される。Right-to-left Λ_C 計算の結果が値になる直前の簡約は、評価文脈が空であるときの β 簡約 $[(\lambda x.V')\,V] \rightsquigarrow V'[V/x]$ の時のみである。これを以下の様に SLC に変換して簡約をすると、

$$\begin{array}{rl} & T[\![(\lambda x.V')\,V]\!] \\ = & \langle \bullet \,|\, (x \Rightarrow T_e[\![V']\!]) \uparrow T_e[\![V]\!] \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle \bullet \,|\, x \Rightarrow T_e[\![V']\!] \,|\, T_e[\![V]\!] \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle \bullet \,|\, T_e[\![V']\!][T_e[\![V]\!]/x] \,\rangle \\ = & \langle \bullet \,|\, T_e[\![V'[T_e[\![V]\!]/x]]\!] \,\rangle \text{ (代入補題より)} \\ \rightsquigarrow & T[\![V'[V/x]]\!] \end{array}$$

より $T[\![(\lambda x.V')\,V]\!] \rightsquigarrow^* T[\![V'[V/x]]\!]$ が成り立つ。そして

$$T[\![V'[V/x]]\!] = \langle \bullet \,|\, T_e[\![V'[V/x]]\!] \,\rangle \rightsquigarrow T_e[\![V'[V/x]]\!]$$

となり、$T_e[\![V'[V/x]]\!]$ が結果の値として返ってくる。いま $M \rightsquigarrow^* V$ なら、$T[\![M]\!] \approx T[\![V]\!]$ が成り立ち、これは同じ値 v 簡約にされる。$T[\![V]\!] \rightsquigarrow T_e[\![V]\!] = v$ であるので、$T[\![M]\!] \rightsquigarrow^* v = T_e[\![V]\!]$ が成り立つ。$T_e[\![V]\!]$ の前の簡約は必ず $T[\![V]\!] \rightsquigarrow T_e[\![V]\!]$ になるので、$T[\![M]\!] \rightsquigarrow^* T[\![V]\!]$ となることがわかる。

これらの結果によって Right-to-left Λ_C における計算をある程度、Call-by-value Right-to-left SLC で模倣できていることを示していると考えられるが、模倣関係として典型的に思い浮かべるのは以下のようなより強い関係である。

> Right-to-left Λ_C 計算の式 M について $M \rightsquigarrow N$ が成り立つなら、$T[\![M]\!] \rightsquigarrow^* T[\![N]\!]$ が成り立つ。

しかし、この関係は現在の定式化では成り立たない。$T[\![M]\!]$ を実行しても $T[\![N]\!]$ そのものにはならず、$T[\![N]\!]$ を何段階か実行したあとのものにしかならないのである。これは Plotkin が CPS 変換の模倣性を示すときの状況 [7] と似ている。CPS 変換前の簡約は CPS 変換後の簡約に丁度は対応しておらず、administrative redex を上手に簡約した後の項にしか対応しないのである。この問題は変換を工夫することによってきれいな形で Danvy と Filinski が解決している [2]。同様の方法が我々の場合にも使えるかどうかは今後の課題である。

本論文で示した変換は Λ_C 計算の等価性を粗くモデルしている可能性は残っている。つまり Λ_C 計算では異なる二つの項が同じ SLC の項に変換されている可能性はある。これを排除するためには変換の単射性を示す必要がある。単射を示すには、$T[\![M]\!] \approx T[\![N]\!]$ となるような Λ_C 計算の

式 M, N があるならば、β 簡約と $\mathcal{C}$ の挙動を表す簡約規則において $M = N$ であることを証明すればよい。これも今後の課題である。

上の 補題 4.3.1、 定理 4.3.2、補題 4.3.3 については付録 A にてその証明を詳しく述べる。

4.4　Right-to-left Λ_C 計算の変換例

具体的な例を用いて Right-to-left Λ_C 計算の挙動が Call-by-value Right-to-left SLC において実現できていることを示す。

1. まず Right-to-left Λ_C 計算の式、$((\lambda x.\, x)\,(\lambda y.\, y))\,((\lambda z.\, z)\,(\lambda v.\, v))$ を例にあげる。これは以下の様に簡約が進む。

$$
\begin{array}{rcl}
((\lambda x.\, x)\,(\lambda y.\, y))\,(\underline{(\lambda z.\, z)\,(\lambda v.\, v)}) & \rightsquigarrow & (\underline{(\lambda x.\, x)\,(\lambda y.\, y)})\,(\lambda v.\, v) \\
& \rightsquigarrow & \underline{(\lambda y.\, y)\,(\lambda v.\, v)} \\
& \rightsquigarrow & \lambda v.\, v
\end{array}
$$

まず Right-to-left の簡約規則より引数部分である $(\lambda z.\, z)\,(\lambda v.\, v)$ が評価され、値 $\lambda v.\, v$ に簡約される。引数部分が値になったので、次に関数部分である $(\lambda x.\, x)\,(\lambda y.\, y)$ が評価され、$\lambda y.\, y$ に簡約される。関数部分と引数部分がそれ以上実行できない形になったので、β 簡約が行われて $\lambda v.\, v$ が返ってくることがわかる。

これを Call-by-value Right-to-left SCL に変換して実行する。上の式の Right-to-left Λ_C における構文は、詳しくは $E = E'[F], M = (\lambda z.\, z)\,(\lambda v.\, v), E' = [\,], F = ((\lambda x.\, x)\,(\lambda y.\, y))\,[\,]$ となっている。

この構文を用いて変換規則 $T\llbracket\cdot\rrbracket$ を適用すると

$$
T\llbracket((\lambda x.\, x)\,(\lambda y.\, y))\,((\lambda z.\, z)\,(\lambda v.\, v))\rrbracket = \langle \bullet \,|\, T_e\llbracket((\lambda x.\, x)\,(\lambda y.\, y))\,((\lambda z.\, z)\,(\lambda v.\, v))\rrbracket \rangle
$$

となるが、これは補題 4.3.1 より

$$
\begin{array}{rl}
& \langle \bullet \,|\, T\llbracket((\lambda x.\, x)\,(\lambda y.\, y))\,((\lambda z.\, z)\,(\lambda v.\, v))\rrbracket \rangle \\
\approx & \langle T_c\llbracket[((\lambda x.\, x)\,(\lambda y.\, y))\,[\,]]\rrbracket \,|\, T_e\llbracket(\lambda z.\, z)\,(\lambda v.\, v)\rrbracket \rangle \\
= & \langle T_c\llbracket[\,]\rrbracket \downarrow T_F\llbracket((\lambda x.\, x)\,(\lambda y.\, y))\,[\,]\rrbracket \,|\, T_f\llbracket\lambda z.\, z\rrbracket \uparrow T_e\llbracket\lambda v.\, v\rrbracket \rangle \\
= & \langle T_c\llbracket[\,]\rrbracket \downarrow T_f\llbracket(\lambda x.\, x)\,(\lambda y.\, y)\rrbracket \,|\, T_f\llbracket\lambda z.\, z\rrbracket \uparrow T_e\llbracket\lambda v.\, v\rrbracket \rangle \\
= & \langle T_c\llbracket[\,]\rrbracket \downarrow (\overline{T_f\llbracket\lambda x.\, x\rrbracket \uparrow T_e\llbracket\lambda y.\, y\rrbracket}) \,|\, T_f\llbracket\lambda z.\, z\rrbracket \uparrow T_e\llbracket\lambda v.\, v\rrbracket \rangle \\
= & \langle \bullet \downarrow (\overline{(x \Rightarrow x) \uparrow \lceil y \Rightarrow y \rceil}) \,|\, (z \Rightarrow z) \uparrow \lceil v \Rightarrow v \rceil \rangle
\end{array}
$$

と変換される。これは以下の様に簡約される。

$$
\begin{array}{ll}
& \langle \bullet \downarrow (\overline{(x \Rightarrow x) \uparrow \lceil y \Rightarrow y \rceil}) \,|\, (z \Rightarrow z) \uparrow \lceil v \Rightarrow v \rceil \rangle \\
\rightsquigarrow & \langle \bullet \downarrow (\overline{(x \Rightarrow x) \uparrow \lceil y \Rightarrow y \rceil}) \,|\, z \Rightarrow z \,|\, \lceil v \Rightarrow v \rceil \rangle \\
\rightsquigarrow & \langle \bullet \downarrow (\overline{(x \Rightarrow x) \uparrow \lceil y \Rightarrow y \rceil}) \,|\, \lceil v \Rightarrow v \rceil \rangle \\
\rightsquigarrow & \langle \bullet \,|\, \overline{(x \Rightarrow x) \uparrow \lceil y \Rightarrow y \rceil} \,|\, \lceil v \Rightarrow v \rceil \rangle \\
\rightsquigarrow & \langle [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil v \Rightarrow v \rceil)] \,|\, (x \Rightarrow x) \uparrow \lceil y \Rightarrow y \rceil \rangle \\
\rightsquigarrow & \langle [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil v \Rightarrow v \rceil)] \,|\, x \Rightarrow x \,|\, \lceil y \Rightarrow y \rceil \rangle \\
\rightsquigarrow & \langle [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil v \Rightarrow v \rceil)] \,|\, \lceil y \Rightarrow y \rceil \rangle \\
\rightsquigarrow & \langle \bullet \,|\, y \Rightarrow y \,|\, \lceil v \Rightarrow v \rceil \rangle \\
\rightsquigarrow & \langle \bullet \,|\, \lceil v \Rightarrow v \rceil \rangle \\
\rightsquigarrow & \lceil v \Rightarrow v \rceil
\end{array}
$$

以上の簡約をみると Call-by-value Right-to-left の簡約規則より、まず変換された引数部分 $(z \Rightarrow z) \uparrow \lceil v \Rightarrow v \rceil$ が評価され、値 $\lceil v \Rightarrow v \rceil$ に簡約される。項部分が値になったので、次に変換された関数部分である $\overline{(x \Rightarrow x) \uparrow \lceil y \Rightarrow y \rceil}$ が項側で評価されてから SLC の関数部分に戻り、$y \Rightarrow y$ に簡約される。関数部分と項部分がそれ以上実行できない形になったので、β 簡約が行われて $\lceil v \Rightarrow v \rceil$ が返ってくる。これは Right-to-left Λ_C 計算と同じ挙動となっていることがわかり、意図した振る舞いが行われている。

2. もうひとつ、$\mathcal{C}$ の入った例をあげる。まず Right-to-left Λ_C 計算の式、
$(\lambda y.\,4)\,(\mathcal{A}\,3) = (\lambda y.\,4)\,(\mathcal{C}\,(\lambda\_.\,3))$ を例にあげる。これは以下の様に簡約が進む。

$$
\begin{array}{rcl}
(\lambda y.\,4)\,(\mathcal{C}\,(\lambda\_.\,3)) & \rightsquigarrow & (\lambda\_.\,3)\,(\lambda x.\,(\mathcal{A}\,((\lambda y.\,4)\,[x]))) \\
& = & (\lambda\_.\,3)\,(\lambda x.\,(\mathcal{C}\,(\lambda\_.\,((\lambda y.\,4)\,[x])))) \\
& \rightsquigarrow & 3
\end{array}
$$

これは $\mathcal{C}\,(\lambda\_.\,3)$ が呼ばれた際の評価文脈、すなわちそのときの継続である $(\lambda y.\,4)\,[\,]$ が関数としてパッケージ化された後、捨てられていることがわかる。上の式の Right-to-left Λ_C における構文は、詳しくは $E = E'[F], M = \mathcal{C}\,(\lambda\_.\,3), E' = [\,], F = (\lambda y.\,4)\,[\,]$ となっている。

この構文を用いて変換規則 $T[\![\cdot]\!]$ を適用すると

$$T[\![(\lambda y.\,4)\,(\mathcal{C}\,(\lambda\_.\,3))]\!] = \langle \bullet \,|\, T_e[\![(\lambda y.\,4)\,(\mathcal{C}\,(\lambda\_.\,3))]\!] \rangle$$

となるが、これは補題 4.3.1 より

$$
\begin{aligned}
& \langle \bullet \,|\, T_e[\![(\lambda y.\, 4)\,(\mathcal{C}\,(\lambda \_.\, 3))]\!] \rangle \\
\approx\; & \langle T_c[\![(\lambda y.\, 4)\,[\,]]\!] \,|\, T_e[\![\mathcal{C}\,(\lambda \_.\, 3)]\!] \rangle \\
=\; & \langle T_c[\![[\,]]\!] \downarrow T_F[\![(\lambda y.\, 4)\,[\,]]\!] \,|\, T_f[\![\mathcal{C}]\!] \uparrow T_e[\![\lambda \_.\, 3]\!] \rangle \\
=\; & \langle T_c[\![[\,]]\!] \downarrow T_f[\![\lambda y.\, 4]\!] \,|\, T_f[\![\mathcal{C}]\!] \uparrow T_e[\![\lambda \_.\, 3]\!] \rangle \\
=\; & \langle \bullet \downarrow (y \Rightarrow 4) \,|\, (y' \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y' \rceil)]) \uparrow (\lceil \_ \Rightarrow 3 \rceil) \rangle
\end{aligned}
$$

と変換される。これは以下の様に簡約される。

$$
\begin{aligned}
& \langle \bullet \downarrow (y \Rightarrow 4) \,|\, (y' \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y' \rceil)]) \uparrow (\lceil \_ \Rightarrow 3 \rceil) \rangle \\
\rightsquigarrow\; & \langle \bullet \downarrow (y \Rightarrow 4) \,|\, y' \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y' \rceil)] \,|\, \lceil \_ \Rightarrow 3 \rceil \rangle \\
\rightsquigarrow\; & \langle [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow (\bullet \downarrow (y \Rightarrow 4)) \rceil)] \,|\, \lceil \_ \Rightarrow 3 \rceil \rangle \\
\rightsquigarrow\; & \langle \bullet \,|\, \_ \Rightarrow 3 \,|\, \lceil \_ \Leftarrow (\bullet \downarrow (y \Rightarrow 4)) \rceil \rangle \\
\rightsquigarrow\; & \langle \bullet \,|\, 3 \rangle \\
\rightsquigarrow\; & 3
\end{aligned}
$$

これも変換されたコントロールオペレータ $\mathcal{C}$ が、その時の継続を変換したもの $(\bullet \downarrow (y \Leftarrow 4))$ を受け取ると、値継続としてパッケージ化され、後に捨てられていることがわかる。$\mathcal{C}$ の変換においても、意図したふるまいを見ることができる。

第5章　Call-by-value Left-to-right SLC

3 章 で Call-by-value Right-to-left SCL を示したが、この章では Call-by-value Left-to-right SLC を示す。この評価戦略においては Call-by-value により、引数が値になってから関数適用を行う評価戦略は同じだが、Left-to-right の戦略となるので、引数部分よりも関数部分を先に評価する点が異なる。この違いにより構文および簡約規則が一部異なるが、ほぼ Right-to-left の説明の際と同じことが言える。差異については随時述べることにするが、Right-to-left と同様のものは割愛して説明する。

5.1　Call-by-value Left-to-right SLC の構文

Call-by-value Left-to-right SLC の構文を以下に示す。3 章 に示した Call-by-value Right-to-left SLC とほぼ同様で、値と値継続にコンテキストが加わる。しかし Left-to-right のコンテキストは適用される項部分が値 v ではなく項 e となっていて、それぞれ値のコンテキストは $[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow e]$ となり、値継続のコンテキストは $[c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)]$ となる。この理由は評価戦略の違いから簡約規則が異なるためで、後の簡約規則において説明する。Call-by-value なので Left-to-right においても値継続のコンテキストはなくてもよい。

$$
\begin{array}{rrcl}
(\text{値}) & v & ::= & x \mid \lceil f \rceil \mid n \mid [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow e] \\
(\text{項}) & e & ::= & v \mid f \uparrow e \\
(\text{関数}) & f & ::= & x \Rightarrow e \mid y \Leftarrow c \mid \overline{e} \mid \underline{c} \\
(\text{継続}) & c & ::= & k \mid c \downarrow f \\
(\text{値継続}) & k & ::= & y \mid \lfloor f \rfloor \mid \bullet \mid [c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)]
\end{array}
$$

ここでもコンテキストの型規則 $(\mathrm{TContext}'_{\mathrm{v}})$ と $(\overline{\mathrm{TContext}'_{\mathrm{v}}})$ を新しく付け加えることにする。

$$
\frac{\Gamma \vdash c : \neg B \quad \Gamma \vdash e : +A}{\Gamma \vdash [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow e] : +(A - B)}\ (\mathrm{TContext}'_{\mathrm{v}})
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash c : \neg B \quad \Gamma \vdash e : +A}{\Gamma \vdash [c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)] : \neg(A \to B)}\ (\overline{\mathrm{TContext}'_{\mathrm{v}}})
$$

これらも以下のようにして求めることができる。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, f_y : \{\substack{+A\to+B \\ \neg B\to\neg A} \vdash f_y : \{\substack{+A\to+B \\ \neg B\to\neg A}}}{\Gamma, \lfloor f_y \rfloor : \neg(A-B) \vdash f_y : \{\substack{+A\to+B \\ \neg B\to\neg A}} \quad \Gamma, \lfloor f_y \rfloor : \neg(A-B) \vdash c : \neg B}{\Gamma, \lfloor f_y \rfloor : \neg(A-B) \vdash c \downarrow f_y : \neg A}}{\Gamma \vdash \lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y : \{\substack{+A\to+(A-B) \\ \neg(A-B)\to\neg A}} \qquad \Gamma \vdash e : +A}{\Gamma \vdash [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow e] : +(A-B)}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, f_x : \{\substack{+A\to+B \\ \neg B\to\neg A} \vdash f_x : \{\substack{+A\to+B \\ \neg B\to\neg A}}}{\Gamma, \lceil f_x \rceil : +(A\to B) \vdash f_x : \{\substack{+A\to+B \\ \neg B\to\neg A}} \quad \Gamma, \lceil f_x \rceil : +(A\to B) \vdash e : +A}{\Gamma, \lceil f_x \rceil : +(A\to B) \vdash f_x \uparrow e : +B}}{\Gamma \vdash \lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e : \{\substack{+(A\to B)\to+B \\ \neg B\to\neg(A\to B)}} \qquad \Gamma \vdash c : \neg B}{\Gamma \vdash [c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)] : \neg(A\to B)}
$$

5.2　Call-by-value Left-to-right SLC の簡約規則

Call-by-value Left-to-right SLC の簡約規則を以下に示す。Right-to-left の簡約規則と異なるものには、$'$ を付けて区別している。

$$
\begin{array}{rrcl}
(\mathit{begin}) & e & \rightsquigarrow & \langle \bullet \,|\, e \rangle \\
(\overline{\mathit{pop}}) & \langle c \,|\, f \uparrow e \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \\
(\mathit{push}'_{\mathrm{v}}) & \langle c \,|\, f_v \,|\, f \uparrow e \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \downarrow f_v \,|\, f \uparrow e \rangle \\
(\mathit{context}'_{\mathrm{v}}) & \langle [c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)] \,|\, \lceil f \rceil \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \\
(\mathit{exchange}'_{\mathrm{v}}) & \langle c \,|\, \overline{e'} \,|\, e \rangle & \rightsquigarrow & \langle [c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)] \,|\, e' \rangle \\
(\beta_{\mathrm{v}}) & \langle c \,|\, x \Rightarrow e \,|\, v \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \,|\, e[v/x] \rangle \\
(\overline{\beta}_{\mathrm{v}}) & \langle c \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, v \rangle & \rightsquigarrow & \langle c'[c/y] \,|\, v \rangle \\
(\overline{\mathit{exchange}'}_{\mathrm{v}}) & \langle c \,|\, \underline{c'} \,|\, e \rangle & \rightsquigarrow & \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow e] \rangle \\
(\overline{\mathit{context}'}_{\mathrm{v}}) & \langle \lfloor f \rfloor \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow e] \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \\
(\mathit{pop}_{\mathrm{v}}) & \langle c \downarrow f \,|\, v \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \,|\, f \,|\, v \rangle \\
(\overline{\mathit{end}}) & \langle \bullet \,|\, v \rangle & \rightsquigarrow & v
\end{array}
$$

簡約規則についても Call-by-value Right-to-left SLC とほぼ同様である。Call-by-value Right-to-left SLC は関数部分より引数部分を先に評価する規則であったが、Call-by-value Left-to-right SLC は逆に引数部分より関数部分を先に評価する規則になっている点が異なる。この差異が端的にあらわれているのが $(\mathit{exchange}'_{\mathrm{v}})$ と、$(\overline{\mathit{exchange}'}_{\mathrm{v}})$ である。これらは関数に焦点を当てる規則であり、Right-to-left では引数部分である項部分が値になってから使われる規則であった。しかし Left-to-right では関数部分を先に評価するので項部分が値 v でなくても適用が可能である。この挙動に

より、コンテキストに e が含まれるのである。そして $(push_{\mathrm{v}})$ に関しても変更があり、$(push'_{\mathrm{v}})$ では関数部分が f_v $(x \Rightarrow e$ 又は $y \Leftarrow c)$ の場合にのみ、継続部分に押しやることができる。これは関数がそれ以上簡約されない形になったので、次に項部分に焦点をあて、引数部分を計算する挙動を表し、これが Left-to-right の挙動となっている。(β_{v}) と $(\overline{\beta}_{\mathrm{v}})$ については、Call-by-value の戦略通り、項部分の引数が値 v になっていなくては使うことができなくなっている。$(\overline{push})$ も Call-by-value の評価戦略より現れない。

Call-by-value Left-to-right SLC の簡約も 2 章 の SLC の簡約の一部になっている。以下に Call-by-value Left-to-right における簡約規則まとめを記しておく。

$(begin)$	$\cdots$	計算をスタートさせる規則。
$(\overline{pop})$	$\cdots$	関数と項を分解する規則。
$(push'_{\mathrm{v}})$	$\cdots$	関数部分がそれ以上実行できない形になったので、一度関数を継続側に追いやり、項部分を評価しにいく規則。Left-to-right の特徴を表している。
$(context'_{\mathrm{v}})$	$\cdots$	項側で計算した関数を再び関数部分に戻す規則。
$(exchange'_{\mathrm{v}})$	$\cdots$	焦点を項部分から関数にあて、先にその関数を項側で計算する規則。Left-to-right の特徴を表している。
(β_{v})	$\cdots$	β簡約をする規則。Call-by-vale の特徴を表している。
$(\overline{\beta}_{\mathrm{v}})$	$\cdots$	継続側のβ簡約である。
$(\overline{exchange'}_{\mathrm{v}})$	$\cdots$	焦点を継続部分から関数にあて、先にその関数を継続側で評価する規則。
$(\overline{context}_{\mathrm{v}})$	$\cdots$	$(exchange_{\mathrm{v}})$ の継続版で、継続側で計算をした関数を再び関数部分に戻す規則。
(pop_{v})	$\cdots$	項部分が値になったので、継続側から関数を引き戻す規則。
$(\overline{end})$	$\cdots$	計算を終了する規則。

Call-by-value Left-to-right SLC の簡約規則についても、Right-to-left 同様に Progress と Preservation の性質が成り立つことを示すことができる。さらに以下の命題も成り立つ。

命題 5.2.1 Call-by-value Left-to-right SLC の簡約は型を持つならば一意的である。

これも 付録 A にて証明の詳細を説明する。

簡約の一意性が示されると、Right-to-left 同様に状態の等価性を定義することができる。

第6章　Left-to-right Λ_C 計算の変換

4 章 で示された Felleisen による Right-to-left Λ_C 計算から Call-by-value Right-to-left SCL への変換が可能だったように、ほぼ同じ形で Felleisen による Left-to-right Λ_C 計算を Call-by-value Left-to-right SLC に変換ができることを示す。

6.1　Left-to-right Λ_C 計算の構文

Felleisen の Left-to-right Λ_C 計算の構文を次に示す。

$$
\begin{array}{rrcl}
(\text{値}) & V & ::= & x \mid \lambda x.\, M \mid \mathcal{C} \\
(\text{項}) & M & ::= & V \mid M\, M' \\
(\text{評価文脈}) & E & ::= & [\,] \mid E[F] \\
(\text{フレーム}) & F & ::= & V\ [\,] \mid [\,]\ M
\end{array}
$$

ここでの Right-to-left との差異はフレームの部分のみである。Left-to-light は先に関数部分を評価してから引数部分を評価する簡約戦略であるが、フレームをみると $[\,]\ M$ のように、関数部分が評価できる文脈になっている場合はまず関数部分を先に実行し、$V\ [\,]$ のように、関数部分が値になってから引数部分が評価されていることがわかる。

6.2　Left-to-right Λ_C 計算の簡約規則

Left-to-right Λ_C 計算の簡約規則は次のふたつからなる。

$$
\begin{array}{rcl}
E[(\lambda x.\, M)\, V] & \rightsquigarrow & E[M[V/x]] \\
E[\mathcal{C}\, V] & \rightsquigarrow & V\, (\lambda x.\, \mathcal{A}\, (E[x]))
\end{array}
$$

以上は Right-to-left の場合と全て同様であり、説明は割愛する。

6.3　Call-by-value Left-to-right SLC への変換

ここでは、Left-to-right Λ_C 計算から Call-by-value Left-to-right SLC への変換規則を示す。ここでも Right-to-left 同様に、与えられた Left-to-right Λ_C 計算の式 (項) M は次の規則で Call-by-value

Left-to-right SLC に変換される。

$$T\llbracket M \rrbracket \;=\; \langle \bullet \,|\, T_e\llbracket M \rrbracket \rangle$$

これは、Left-to-right Λ_C 計算の項を Call-by-value Left-to-right SLC の関数に変換する $T_e\llbracket\cdot\rrbracket$ と $T_f\llbracket\cdot\rrbracket$ により以下のように定義される。

$$\begin{array}{rcl}
T_e\llbracket x \rrbracket &=& x \\
T_e\llbracket \lambda x.\, M \rrbracket &=& \lceil x \Rightarrow T_e\llbracket M \rrbracket \rceil \\
T_e\llbracket M\,N \rrbracket &=& T_f\llbracket M \rrbracket \uparrow T_e\llbracket N \rrbracket \\
T_e\llbracket \mathcal{C} \rrbracket &=& \lceil y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil _ \Leftarrow y \rceil)] \rceil
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
T_f\llbracket x \rrbracket &=& \overline{x} \\
T_f\llbracket \lambda x.\, M \rrbracket &=& x \Rightarrow T_e\llbracket M \rrbracket \\
T_f\llbracket M\,N \rrbracket &=& \overline{T_f\llbracket M \rrbracket \uparrow T_e\llbracket N \rrbracket} \\
T_f\llbracket \mathcal{C} \rrbracket &=& y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil _ \Leftarrow y \rceil)]
\end{array}$$

$T_e\llbracket\cdot\rrbracket$ および $T_f\llbracket\cdot\rrbracket$ の変換規則においては、Right-to-left の場合と全て同様である。

Left-to-right の場合も、この変換が簡約規則を保存することを示すため、次の $T_c\llbracket\cdot\rrbracket$ を（$T_F\llbracket\cdot\rrbracket$ を使って）定義する。

$$\begin{array}{rcl}
T_c\llbracket [\,] \rrbracket &=& \bullet \\
T_c\llbracket E[F] \rrbracket &=& (F = V\ [\,]\ \text{の場合})\ T_c\llbracket E \rrbracket \downarrow T_F\llbracket F \rrbracket \\
 && (F = [\,]\ M\ \text{の場合})\ [T_c\llbracket E \rrbracket \downarrow (T_F\llbracket F \rrbracket)]
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
T_F\llbracket V\ [\,] \rrbracket &=& T_f\llbracket V \rrbracket \\
T_F\llbracket [\,]\ M \rrbracket &=& \lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e\llbracket M \rrbracket
\end{array}$$

評価文脈とフレームの変換規則も Right-to-left の場合とほぼ同様であるが、フレームの構文が違うので、フレームの変換規則のみ若干異なる。空の評価文脈は初期継続に変換され、フレームの列は評価文脈の前に実行する関数の列になることは同様である。評価文脈が $E[F]$ で、なおかつフレームが $V\ [\,]$ の場合は評価文脈の前に $T_f\llbracket V \rrbracket$ をそのまま実行するように変換する。評価文脈が $E[F]$ で、なおかつフレームが $[\,]\ M$ の場合は Left-to-right の評価戦略を用いているため先に関数部分を計算し、$T_e\llbracket M \rrbracket$ を後で適用するような関数に変換される。この場合もコンテキストにする理由は Right-to-left のときと同じである。

このように定義をすると、Right-to-left と同様にして、評価文脈 E の構造に関する帰納法により、以下の補題を示すことができる。

補題 6.3.1 $\langle \bullet \,|\, T_e\llbracket E[M] \rrbracket \rangle \approx \langle T_c\llbracket E \rrbracket \,|\, T_e\llbracket M \rrbracket \rangle$

さらに、この補題を使って次の定理を示すことができる。

定理 6.3.2 Left-to-right Λ_C 計算の式 M について $M \rightsquigarrow N$ が成り立ち、かつ $\vdash T[\![M]\!] : +\mathsf{int}$ なら、$T[\![M]\!] \approx T[\![N]\!]$ が成り立つ。

Call-by-value の場合と同様、この定理の証明には、次の代入補題と論理関係を使った議論が必要である。

補題 6.3.3 (Call-by-value Left-to-right の代入補題) $T_e[\![M]\!][T_e[\![V]\!]/x] = T_e[\![M[V/x]]\!]$

系 6.3.4 Left-to-right Λ_C 計算の式 M について $M \rightsquigarrow^* V$ が成り立ち $\vdash T[\![M]\!] : +\mathsf{int}$ なら、$T[\![M]\!] \rightsquigarrow^* T[\![V]\!]$ が成り立つ。

上の補題 6.3.1、定理 6.3.2、補題 6.3.3 については付録 A にてその証明を詳しく述べる。

6.4 Left-to-right Λ_C 計算の変換例

具体的な例を用いて Left-to-right Λ_C 計算の挙動が Call-by-value Left-to-right SLC において実現できていることを示す。

1. まず Left-to-right Λ_C 計算の式、$((\lambda x.\, x)\, (\lambda y.\, y))\, ((\lambda z.\, z)\, (\lambda v.\, v))$ を例にあげる。これは以下の様に簡約が進む。

$$\begin{array}{rcl} (\underline{(\lambda x.\, x)\, (\lambda y.\, y)})\, ((\lambda z.\, z)\, (\lambda v.\, v)) & \rightsquigarrow & (\lambda y.\, y)\, (\underline{(\lambda z.\, z)\, (\lambda v.\, v)}) \\ & \rightsquigarrow & \underline{(\lambda y.\, y)\, (\lambda v.\, v)} \\ & \rightsquigarrow & \lambda v.\, v \end{array}$$

まず Left-to-right の簡約規則より関数部分である $(\lambda x.\, x)\, (\lambda y.\, y)$ が評価され、$\lambda y.\, y$ に簡約される。関数部分がそれ以上実行できない形になったので、次に引数部分である $(\lambda z.\, z)\, (\lambda v.\, v)$ が評価され、値 $\lambda v.\, v$ に簡約される。関数部分と引数部分がそれ以上部分がそれ以上実行できない形になったので、β 簡約が行われて $\lambda v.\, v$ が返ってくることがわかる。

これを Call-by-value Left-to-right SCL に変換して実行する。上の式の Left-to-Right Λ_C における構文は、詳しくは $E = E'[F], M = (\lambda x.\, x)\, (\lambda y.\, y), E' = [\;], F = [\;]\, ((\lambda z.\, z)\, (\lambda v.\, v))$ となっている。

この構文を用いて変換規則 $T[\![\cdot]\!]$ を適用すると

$$T[\![((\lambda x.\, x)\,(\lambda y.\, y))\,((\lambda z.\, z)\,(\lambda v.\, v))]\!] = \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![((\lambda x.\, x)\,(\lambda y.\, y))\,((\lambda z.\, z)\,(\lambda v.\, v))]\!]\,\rangle$$

となるが、これは補題 6.3.1 より

$$\begin{array}{rl}
& \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![((\lambda x.\, x)\,(\lambda y.\, y))\,((\lambda z.\, z)\,(\lambda v.\, v))]\!]\,\rangle \\
\approx & \langle\, T_c[\![[\ ]\,((\lambda z.\, z)\,(\lambda v.\, v))]\!] \,|\, T_e[\![(\lambda x.\, x)\,(\lambda y.\, y)]\!]\,\rangle \\
= & \langle\, [T_c[\![[\ ]]\!] \downarrow T_F[\![[\ ]\,((\lambda z.\, z)\,(\lambda v.\, v))]\!]] \,|\, T_f[\![\lambda x.\, x]\!] \uparrow T_e[\![\lambda y.\, y]\!]\,\rangle \\
= & \langle\, [T_c[\![[\ ]]\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow (f_x \uparrow T_e[\![(\lambda z.\, z)\,(\lambda v.\, v)]\!]))] \,|\, T_f[\![\lambda x.\, x]\!] \uparrow T_e[\![\lambda y.\, y]\!]\,\rangle \\
= & \langle\, [T_c[\![[\ ]]\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow (f_x \uparrow (T_f[\![\lambda z.\, z]\!] \uparrow T_e[\![\lambda v.\, v]\!])))] \,|\, T_f[\![\lambda x.\, x]\!] \uparrow T_e[\![\lambda y.\, y]\!]\,\rangle \\
= & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow ((z \Rightarrow z) \uparrow \lceil v \Rightarrow v \rceil))] \,|\, (x \Rightarrow x) \uparrow \lceil y \Rightarrow y \rceil\,\rangle
\end{array}$$

と変換される。これは以下の様に簡約される。

$$\begin{array}{rl}
& \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow ((z \Rightarrow z) \uparrow \lceil v \Rightarrow v \rceil))] \,|\, (x \Rightarrow x) \uparrow \lceil y \Rightarrow y \rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow ((z \Rightarrow z) \uparrow \lceil v \Rightarrow v \rceil))] \,|\, x \Rightarrow x \,|\, \lceil y \Rightarrow y \rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow ((z \Rightarrow z) \uparrow \lceil v \Rightarrow v \rceil))] \,|\, \lceil y \Rightarrow y \rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, y \Rightarrow y \,|\, (z \Rightarrow z) \uparrow \lceil v \Rightarrow v \rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \downarrow (y \Rightarrow y) \,|\, (z \Rightarrow z) \uparrow \lceil v \Rightarrow v \rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \downarrow (y \Rightarrow y) \,|\, z \Rightarrow z \,|\, \lceil v \Rightarrow v \rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \downarrow (y \Rightarrow y) \,|\, \lceil v \Rightarrow v \rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, y \Rightarrow y \,|\, \lceil v \Rightarrow v \rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, \lceil v \Rightarrow v \rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \lceil v \Rightarrow v \rceil
\end{array}$$

以上の簡約をみると Call-by-value Left-to-right の簡約規則より、まず変換された関数部分 $(x \Rightarrow x) \uparrow \lceil y \Rightarrow y \rceil$ が項部分で評価され、値 $\lceil y \Rightarrow y \rceil$ に簡約される。項部分がそれ以上実行できない形になったので、$(context'_{\mathrm{v}})$ を用いて SLC の関数部分に戻す。次に変換された引数部分である $(z \Rightarrow z) \uparrow \lceil v \Rightarrow v \rceil$ が評価され、値 $\lceil v \Rightarrow v \rceil$ に簡約される。関数部分と項部分がそれ以上実行できない形になったので、β 簡約が行われて $\lceil v \Rightarrow v \rceil$ が返ってくる。これは Left-to-right Λ_C 計算と同じ挙動となっていることがわかり、意図した振る舞いが行われている。

2. Right-to-left Λ_C 計算と同様、$(\lambda y.\, 4)\,(\mathcal{A}\, 3) = (\lambda y.\, 4)\,(\mathcal{C}\,(\lambda\_.\, 3))$ を例にあげるが、これは Right-to-left Λ_C 計算と全く同様の説明となるので割愛する。

第7章　Call-by-name SLC

この章では、2 章 で示した SLC の Call-by-name 版を示す。Call-by-name の評価戦略は、引数が値でなくても、関数適用をいつでも行うことができる規則となっている。そして関数から評価していくので、 Left-to-right の戦略を暗に意味していることになる。ここに示す体系は 3 章 で示した Call-by-value (Right-to-left) SLC の体系の値と継続を、丁度逆にした格好になっている。

7.1　Call-by-name SLC の構文

Call-by-name SLC の構文を以下に示す。3 章 では値と値継続にコンテキストが加わっていたが、ここでも同様に値と値継続にコンテキストが加わり、それぞれ $[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k \downarrow f_y) \uparrow e]$ と $[k \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)]$ となる。Call-by-name SLC におけるコンテキストは、値継続 k と項 e をパッケージ化したものであり、Call-by-value (Right-to-left) SLC において継続と値を丁度逆にした形になっていることがわかる。その用途は Call-by-value の場合と同じであるが、Call-by-value において値継続のコンテキストは無くてもよいものであった。これの双対として、 Call-by-name における値のコンテキスト $[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k \downarrow f_y) \uparrow e]$ はこの評価戦略では無くてもよいものとなっている。しかし Call-by-value 同様、値継続との双対のために、両方表記することにする。

$$
\begin{array}{rlll}
(\text{値}) & v & ::= & x \mid \lceil f \rceil \mid n \mid [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k \downarrow f_y) \uparrow e] \\
(\text{項}) & e & ::= & v \mid f \uparrow e \\
(\text{関数}) & f & ::= & x \Rightarrow e \mid y \Leftarrow c \mid \overline{e} \mid \underline{c} \\
(\text{継続}) & c & ::= & k \mid c \downarrow f \\
(\text{値継続}) & k & ::= & y \mid \lfloor f \rfloor \mid \bullet \mid [k \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)]
\end{array}
$$

ここでも Call-by-name コンテキストの型規則、$(\mathrm{TContext_n})$ と $(\overline{\mathrm{TContext_n}})$ を新しく付け加える。

$$
\frac{\Gamma \vdash k : \neg B \quad \Gamma \vdash e : +A}{\Gamma \vdash [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k \downarrow f_y) \uparrow e] : +(A - B)}\ (\mathrm{TContext_n})
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash k : \neg B \quad \Gamma \vdash e : +A}{\Gamma \vdash [k \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)] : \neg(A \to B)}\ (\overline{\mathrm{TContext_n}})
$$

これらは以下の様にして求めることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, f_y : \left\{\substack{+A\to+B\\ \neg B\to\neg A}\right. \vdash f_y : \left\{\substack{+A\to+B\\ \neg B\to\neg A}\right.}}{\Gamma, \lfloor f_y \rfloor : \neg(A-B) \vdash f_y : \left\{\substack{+A\to+B\\ \neg B\to\neg A}\right.} \quad \Gamma, \lfloor f_y \rfloor : \neg(A-B) \vdash k : \neg B}{\Gamma, \lfloor f_y \rfloor : \neg(A-B) \vdash k \downarrow f_y : \neg A}}{\Gamma \vdash \lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k \downarrow f_y : \left\{\substack{+A\to+(A-B)\\ \neg(A-B)\to\neg A}\right.} \quad \Gamma \vdash e : +A}{\Gamma \vdash [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k \downarrow f_y) \uparrow e] : +(A-B)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, f_x : \left\{\substack{+A\to+B\\ \neg B\to\neg A}\right. \vdash f_x : \left\{\substack{+A\to+B\\ \neg B\to\neg A}\right.}}{\Gamma, \lceil f_x \rceil : +(A\to B) \vdash f_x : \left\{\substack{+A\to+B\\ \neg B\to\neg A}\right.} \quad \Gamma, \lceil f_x \rceil : +(A\to B) \vdash e : +A}{\Gamma, \lceil f_x \rceil : +(A\to B) \vdash f_x \uparrow e : +B}}{\Gamma \vdash \lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e : \left\{\substack{+(A\to B)\to+B\\ \neg B\to\neg(A\to B)}\right.} \quad \Gamma \vdash k : \neg B}{\Gamma \vdash [k \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)] : \neg(A\to B)}$$

7.2　Call-by-name SLC の簡約規則

Call-by-name SLC の簡約規則を以下に示す。Call-by-value の場合と同様に Call-by-name に特有の規則には $_{\mathrm{n}}$ をつけてある。

$$\begin{array}{rrcl}
(\mathit{begin}) & e & \rightsquigarrow & \langle \bullet \,|\, e \rangle \\
(\overline{\mathit{pop}}_{\mathrm{n}}) & \langle k \,|\, f \uparrow e \rangle & \rightsquigarrow & \langle k \,|\, f \,|\, e \rangle \\
(\mathit{context}_{\mathrm{n}}) & \langle [k \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)] \,|\, \lceil f \rceil \rangle & \rightsquigarrow & \langle k \,|\, f \,|\, e \rangle \\
(\mathit{exchange}_{\mathrm{n}}) & \langle k \,|\, \overline{e'} \,|\, e \rangle & \rightsquigarrow & \langle [k \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)] \,|\, e' \rangle \\
(\beta_{\mathrm{n}}) & \langle k \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, e \rangle & \rightsquigarrow & \langle k \,|\, e'[e/x] \rangle \\
(\overline{\beta}_{\mathrm{n}}) & \langle k \,|\, y \Leftarrow c \,|\, e \rangle & \rightsquigarrow & \langle c[k/y] \,|\, e \rangle \\
(\overline{\mathit{exchange}}_{\mathrm{n}}) & \langle k \,|\, \underline{c} \,|\, e \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k \downarrow f_y) \uparrow e] \rangle \\
(\overline{\mathit{context}}_{\mathrm{n}}) & \langle \lfloor f \rfloor \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k \downarrow f_y) \uparrow e] \rangle & \rightsquigarrow & \langle k \,|\, f \,|\, e \rangle \\
(\overline{\mathit{push}}_{\mathrm{n}}) & \langle c \downarrow f' \,|\, f \,|\, e \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \downarrow f' \,|\, f \uparrow e \rangle \\
(\mathit{pop}) & \langle c \downarrow f \,|\, e \rangle & \rightsquigarrow & \langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \\
(\overline{\mathit{end}}) & \langle \bullet \,|\, v \rangle & \rightsquigarrow & v
\end{array}$$

これらの規則は (begin) と $(\overline{\mathit{end}})$ を除けば、いずれも Call-by-value Right-to-left SLC の規則の項と継続を機械的に入れ換えることで得ることができる。例えば、$(\overline{\mathit{pop}}_{\mathrm{n}})$ は継続が値継続 k に評価されたら項から関数を呼び戻す規則だが、これは Call-by-value の $(\mathit{pop}_{\mathrm{v}})$ において項が値 v に評価されたら継続から関数を呼び戻しているのに対応する。Call-by-name のそれ以降の規則もすべて Call-by-value の規則の下から順に対応していることがわかる。

項と継続を入れ換えると Call-by-value の簡約規則が Call-by-name の簡約規則になることは、次のように理解できる。Call-by-name では、必要な最小限の計算のみを行って答えを返す。この

「答えの必要性」「答えを受け取るもの」とはまさに継続に他ならない。つまり、初期継続に始まり、答えを受け取るために必要なものを eager に求めていくことが必要最小限の計算のみを行うことに対応しているのである。

このようにして Call-by-name の簡約規則は Call-by-value の簡約規則から機械的に求められるが、Call-by-name における簡約の概要を簡単に述べておく。以下の説明の全体が、ほぼ Call-by-value SLC の双対となっていることは 3 章 の簡約規則の挙動を説明している箇所と照らしあわせるとわかる。

Call-by-value では「項が値になったときに」関数適用が行われていたが、Call-by-name では「継続が継続値になったときに」関数適用が行われる挙動となっている。まず、プログラム e が与えられると非決定性 SLC と同様に、初期継続とともに $\langle \bullet \,|\, e \rangle$ の形から実行するように簡約される。簡約中に二つ組の継続部分が継続側の関数呼び出しだった場合、(pop_{n}) を使って関数呼び出しを継続と関数に分解する。分解後、継続部分がまだ値継続ではなく、他の継続側の関数呼び出しだった場合には $(\overline{push}_{\mathrm{n}})$ を使って関数を継続側におしやり、さらに継続部分を $(\overline{pop})$ を使って実行していく。$(\overline{pop})$ により三つ組の継続部分が値継続になった $\langle k \,|\, f \,|\, e \rangle$ のような形になると、関数適用が行われる。この関数部分 f が $x \Rightarrow e$ の場合は (β_{n}) によって β 簡約が行われるが、このとき引数である項部分は値でなくてよい。これが Call-by-name の評価戦略を表している。$y \Leftarrow c$ の場合は継続側の β 簡約が $(\overline{\beta}_{\mathrm{n}})$ によって行われる。$\overline{e}$ の場合は $(exchange_{\mathrm{n}})$ によって、関数部分に焦点があてられ、関数をそれぞれ項部分で評価を行う。ここでも注目すべきことがある。このとき非決定性 SLC の $(exchange)$ のように $\langle k \,|\, \lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e \,|\, e' \rangle$ とはなっておらず、$\langle [k \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)] \,|\, e' \rangle$ となっていることである。これは $\langle k \,|\, \lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e \,|\, e' \rangle$ としてしまうと、e' がまだ $\lceil f \rceil$ という形をしていない場合、項部分を評価しなくてはいけないが、Call-by-name の評価戦略では二つ組の継続部分が値継続になって初めて項部分に焦点があたる。そこで k や e を一時的に忘れて項部分を先に評価するために関数を継続側におしやり、さらに値継続としてパッケージ化しておく。これによって項部分に焦点があたり、e' が評価される。e' が $\lceil f \rceil$ という形に評価されたときに初めて $(context_{\mathrm{n}})$ を使って $\langle k \,|\, f \,|\, e \rangle$ に戻すようになる。それ以外ではパッケージ化されたまま実行が進む。$\underline{c}$ の場合は $(\overline{exchange}_{\mathrm{n}})$ の双対である $(exchange_{\mathrm{n}})$ によって、関数に焦点があてられ、関数を継続部分で評価を行うが、Call-by-name においてはこのときコンテキストにする必要がない。しかし $(exchange_{\mathrm{n}})$ の双対として表すためにコンテキストに変換する。このようにしてコンテキストの必要性も Call-by-value と双対的になっていること

がわかる。この値継続のコンテキストも、継続部分が $\lfloor f \rfloor$ に評価されると、$(\overline{context}_{\mathrm{n}})$ によって評価された関数を再び関数部分に戻し、三つ組にして実行を続ける。この節の冒頭でも述べたが (pop_{n}) は、β 簡約の結果などで二つ組の継続部分がすでに値継続になっていたときに、関数部分を項から引き戻すのに使う。

以上が Call-by-name SLC の評価規則である。ここには $(push)$ が現れていないが、Call-by-name では常に継続部分が先に計算されるので、継続部分を保留して項部分を評価にいく $(push)$ は不要である。これも Call-by-value において $(\overline{push})$ が使われなかったこととの双対となっていることがわかる。

Call-by-value と Call-by-name の簡約規則が双対の関係にあることがわかると、いろいろと面白いことがわかってくる。例えば、Call-by-value では Right-to-left と Left-to-right の評価戦略が考えられたが、今まで Call-by-name では（引数は実行しないので）評価戦略は「関数部分（のみ）を先に実行する」というもの、すなわち Left-to-right の評価戦略であった。しかし、双対の関係を調べてみると、Call-by-name の世界でも継続の関数 $y \Leftarrow c$ の実行についてはふたつの評価戦略が考えられることがわかる。これを具体的に言おう。Call-by-name においては、暗黙のうちに Left-to-right を考えていたが、$\langle\, c \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, e \,\rangle$ という Call-by-name の式において、Right-to-left に対する戦略を垣間みることができる。まず Call-by-name Left-to-right を考える。継続部分の場合分けにより、簡約が決まる。継続部分が継続値 k の場合は $(\overline{\beta}_{\mathrm{n}})$ が適用され、$\langle\, k \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, e \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[k/y] \,|\, e \,\rangle$ と簡約が進むが、継続部分が $c \downarrow f$ の場合は $(\overline{push}_{\mathrm{n}})$ が適用され、$\langle\, c \downarrow f \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, e \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c \downarrow f \,|\, (y \Leftarrow c') \uparrow e \,\rangle$ と言ったように、$y \Leftarrow c$ の関数が項側に押しやられる。しかし、Call-by-name Right-to-left の場合には、継続部分が値継続でなくても $\langle\, c \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, e \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[c/y] \,|\, e \,\rangle$ と簡約ができる。(この場合の簡約規則は Call-by-value の Left-to-right の特有の規則に $'$ を付けたように、 $(\overline{\beta'_{\mathrm{n}}})$ のようにするのだと予想する。) このようにして Call-by-name においても Right-to-left と Left-to-Right を考えることができる。

また、Call-by-value の関数 $x \Rightarrow e$ の双対は $y \Leftarrow c$ なので、Call-by-name における関数 $x \Rightarrow e$ とは双対の関係にはなっていないこともわかる。このことは、Wadler の双対計算において、and と or はきれいに対応しているが関数については必ずしもきれいに対応がとれていないことと関係していると思われる。

Call-by-value と Call-by-name の双対性については、これまでもいろいろなところで言及されて来たが、ほとんどのものは古典論理との関係によるもので必ずしも普通の λ 計算を素直に中に

含む形では示されてこなかった。本論文は、λ 計算を自然に含む SLC の枠組みの中で双対性を厳密に示している点で意義があると考えられる。

Call-by-name SLC の簡約も、すべて 2 章 の SLC の簡約の一部になっている。以下に Call-by-name SLC における簡約規則まとめを記しておく。

$(begin)$	$\cdots$	計算をスタートさせる規則。
$(\overline{pop}_{\mathrm{n}})$	$\cdots$	継続部分が値継続になったので、項側から関数を引き戻す規則。
$(context_{\mathrm{n}})$	$\cdots$	項側で計算した関数を再び関数部分に戻す規則。
$(exchange_{\mathrm{n}})$	$\cdots$	焦点を項部分から関数にあて、その関数を項側で計算する規則。
(β_{n})	$\cdots$	引数部分の項が値でなくてもβ簡約をする規則。 Call-by-name の特徴を表している。
$(\overline{\beta}_{\mathrm{n}})$	$\cdots$	継続側のβ簡約である。
$(\overline{exchange}_{\mathrm{n}})$	$\cdots$	焦点を継続から関数にあて、その関数を継続側で評価する規則。
$(\overline{context}_{\mathrm{n}})$	$\cdots$	$(exchange_{\mathrm{n}})$ の継続版で、継続側で計算をした関数を再び関数部分に戻す規則。
$(\overline{push}_{\mathrm{n}})$	$\cdots$	継続部分がまだ値継続になっていないので関数を項側におしやり、 継続部分をさらに評価しにいく規則。
(pop)	$\cdots$	継続と関数を分解する規則。
$(\overline{end})$	$\cdots$	計算を終了する規則。

ここからも Call-by-value の際の説明と、丁度双対となっていることがわかる。

Call-by-name の簡約規則についても Progress と Preservation の性質が成り立つことを示すことができる。また、Call-by-value の場合と同様に簡約の一意性も簡単に示すことができる。

命題 7.2.1 Call-by-name SLC の簡約は型を持つならば一意的である。

第8章 $\lambda\mu$ 計算の変換

ここでは、Call-by-name SLC への変換の例として、Parigot の $\lambda\mu$ 計算 [6] を考える。

8.1 $\lambda\mu$ 計算の構文

$\lambda\mu$ 計算の構文を次に示す。$\lambda\mu$ 計算とは、Call-by-name の λ 計算に μ 変数 α、μ 抽象 $\mu\alpha.\,M$、そして名前付き項 $[\alpha]\,M$ を追加したものである。これらの意味については、次の節で簡約規則とともに述べる。

$$
\begin{array}{rrcl}
(\text{値}) & V & ::= & \lambda x.\,M \\
(\text{項}) & M & ::= & x \mid M\,M' \mid V \mid \alpha \mid \mu\alpha.\,M \mid [\alpha]\,M \\
(\text{評価文脈}) & E & ::= & [\,] \mid E[F] \\
(\text{フレーム}) & F & ::= & [\,]\,M
\end{array}
$$

Call-by-name の $E[F]$ の評価文脈中に現れるフレームは一種類のみである。フレーム $[\,]\,M$ は関数部分から評価されることを表している。

8.2 $\lambda\mu$ 計算の簡約規則

$\lambda\mu$ 計算の簡約規則は次の 4 つからなる。

$$
\begin{array}{rcll}
E[(\lambda x.\,M)\,N] & \rightsquigarrow & E[M[N/x]] & \\
E[(\mu\alpha.\,M)\,N] & \rightsquigarrow & E[\mu\alpha'.\,M[\lambda x.\,\alpha'\,(x\,N)/\alpha]] & (x, \alpha' : \text{fresh}) \\
E[\mu\alpha.\,[\alpha]\,M] & \rightsquigarrow & E[M] & (\alpha \text{ は } M \text{ に現れない}) \\
\mu\alpha.\,M & \rightsquigarrow & M[\lambda x.\,\mathcal{A}\,x/\alpha] &
\end{array}
$$

最初の簡約規則は通常の Call-by-name の β 簡約である。次の簡約規則が μ 抽象他の動作を示す規則である。μ 抽象 $\mu\alpha.\,M$ は、直感的にはそのときの継続を取って来て α に束縛し、M を実行する。しかし、$\lambda\mu$ 計算では普通、簡約規則を局所的なものにするため、そのときの継続全体を一度に取ってくるのではなく直近の継続を順にひとつずつ取ってくる形で定式化される。μ 抽象が $(\mu\alpha.\,M)\,N$ のように関数呼び出しの関数部分に現れたとしよう。その時点での $\mu\alpha.\,M$ の直

近の継続は $[\,]\,N$ であり、さらにその後 $(\mu\alpha.M)\,N$ の継続が続くはずである。$(\mu\alpha.M)\,N$ の継続を α' とすると、結局、$\mu\alpha.M$ の継続は全体として $\alpha'\,([\,]\,N)$ となる。これを、通常の関数にした $\lambda x.\alpha'\,(x\,N)$ を α に束縛すればよいので、簡約結果は $\mu\alpha'.M[\lambda x.\alpha'\,(x\,N)/\alpha]$ となる。全体を $\mu\alpha'.$ でくくることで、$(\mu\alpha.M)\,N$ の継続（$= E[\,]$）を α' に取って来ている。

普通の $\lambda\mu$ 計算では、上に示したような通常の代入ではなく $[\alpha]\,M$ を $\alpha'\,(M\,N)$ に直接、置き換えるような特殊な代入が使われる。これは $\lambda\mu$ 計算のいろいろな理論的な性質を示すにあたっての技術的な問題を解決するためだが、本論文では上のような通常の代入で十分である。したがって、本論文では名前付き項 $[\alpha]\,M$ を通常の関数呼び出し $\alpha\,M$ と同一視し、通常の代入を使うことにする。

3 つ目の規則は、 λ 計算の η 簡約に相当する規則である。現在の継続を取得したが、その継続にそのまま M を渡すだけであれば、初めから単に M と書くのと同じであることを示している。

Parigot の μ 抽象の動作は以上の通りであるが、これだけだとプログラミング言語としては使いにくい。というのは、上の簡約規則だと μ 抽象が（うまく 3 つ目の規則で消えない限り）簡約結果に残るので、一度 μ 抽象が実行されるとその μ 抽象は外側に波及していき、いずれトップレベルに到達する。その時点で、簡約できる規則がなくなり μ 抽象自体が計算結果となってしまう。しかし、μ 抽象の意図がそのときの継続を取って来て α に束縛することだと解釈すると、μ 抽象がトップレベルに現れたらそのときの継続（＝計算を終了する）を α に束縛してさらに実行を続けて欲しいと考えられる。これを行っているのが最後の簡約規則である。この規則は μ 抽象 $\mu\alpha.M$ がトップレベルに現れたら α を「実行されたら計算を終了する」ような継続に束縛して μ 抽象の中身 M の実行を続けるようになっている。

8.3　Call-by-name SLC への変換

ここでは、$\lambda\mu$ 計算から Call-by-name SLC への変換規則を示す。Call-by-value の場合と同様に、与えられた $\lambda\mu$ 計算の式 (項) M は、まず次の規則で Call-by-name SLC に変換される。

$$T[\![M]\!] \;=\; \langle \bullet \,|\, T_e[\![M]\!] \rangle$$

$T_e[\![\cdot]\!]$ とそこで使われる $T_f[\![\cdot]\!]$、および後に使う $T_c[\![\cdot]\!]$ とそこで使われる $T_F[\![\cdot]\!]$ の定義は以下の通りである。

$$
\begin{array}{rcl}
T_e[\![x]\!] & = & x \\
T_e[\![\lambda x.\, M]\!] & = & \lceil x \Rightarrow T_e[\![M]\!] \rceil \\
T_e[\![M\,N]\!] & = & T_f[\![M]\!] \uparrow T_e[\![N]\!] \\
T_e[\![\alpha]\!] & = & \alpha \\
T_e[\![\mu\alpha.\, M]\!] & = & (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil \alpha \Rightarrow T_e[\![M]\!] \rceil \\
T_e[\![[\alpha]\,M]\!] & = & \overline{\alpha} \uparrow T_e[\![M]\!] \\[6pt]
T_f[\![x]\!] & = & \overline{x} \\
T_f[\![\lambda x.\, M]\!] & = & \underline{x \Rightarrow T_e[\![M]\!]} \\
T_f[\![M\,N]\!] & = & \overline{T_f[\![M]\!] \uparrow T_e[\![N]\!]} \\
T_f[\![\alpha]\!] & = & \overline{\alpha} \\
T_f[\![\mu\alpha.\, M]\!] & = & \overline{(y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil \alpha \Rightarrow T_e[\![M]\!] \rceil} \\
T_f[\![[\alpha]\,M]\!] & = & \overline{\overline{\alpha} \uparrow T_e[\![M]\!]} \\[6pt]
T_c[\![[\,]]\!] & = & \bullet \\
T_c[\![E[F]]\!] & = & [T_c[\![E]\!] \downarrow (T_F[\![F]\!])] \\[6pt]
T_F[\![[\,]\,M]\!] & = & \lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![M]\!]
\end{array}
$$

μ 変数 α は、SLC では普通の項の変数と解釈される。μ 抽象 $\mu\alpha.\, M$ の変換結果は複雑な形をしているが、これは Λ_C 計算のところで示した $\mathcal{C}$ の定義を使うと $T_e[\![\mathcal{C}\,(\lambda\alpha.\, M)]\!]$ と書き表すことができる。つまり、μ 抽象は Call-by-name で解釈する $\mathcal{C}$ と同じ動作となるのである。

このとき注意しなくてはならないのが $\mathcal{C}$ の変換についてである。Call-by-value では $T_f[\![\mathcal{C}]\!] = y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]$ の $[\cdots]$ のように変換されたが、そこではその評価戦略からそのときの継続が y に代入された際、置き換わる継続は値継続のコンテキストである必要はなかった。しかし Call-by-name においては値継続のコンテキストに置き換わるようにしなくてはならない。すなわち $T_f[\![\mathcal{C}]\!] = y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]$ に現れるコンテキスト $[\cdots]$ は必須である。これは $[\cdots]$ がないと、計算が止まってしまうためである。

その必要性を、具体的な Call-by-name における $\mathcal{C}$ を用いた動作の例を下記にあげて説明する。この例は $\mathcal{C}$ を $T_f[\![\mathcal{C}]\!]$ を用いて関数に変換し、値継続 k と 項 $(x \Rightarrow x) \uparrow \lceil x' \Rightarrow e \rceil$ のもとで実行させる。これはまず下記の様に変換される。

$$\langle\, k \,|\, T_f[\![\mathcal{C}]\!] \,|\, (x \Rightarrow x) \uparrow \lceil x' \Rightarrow e \rceil \,\rangle = \langle\, k \,|\, y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)] \,|\, (x \Rightarrow x) \uparrow \lceil x' \Rightarrow e \rceil \,\rangle$$

次に下記のように簡約が進む。

$$\begin{array}{rl} & \langle\, k \,|\, y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)] \,|\, (x \Rightarrow x) \uparrow \lceil x' \Rightarrow e \rceil \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow k \rceil)] \,|\, (x \Rightarrow x) \uparrow \lceil x' \Rightarrow e \rceil \,\rangle \cdots * \end{array}$$

もし変換の際にコンテキストに置き換わるようしていないと、

$$\begin{array}{rl} * \cdots & \langle\, \bullet \downarrow \lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow k \rceil \,|\, (x \Rightarrow x) \uparrow \lceil x \Rightarrow e \rceil \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, \lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow k \rceil \,|\, (x \Rightarrow x) \uparrow \lceil x' \Rightarrow e \rceil \,\rangle \end{array}$$

となり、項部分に焦点があたらずに $(x \Rightarrow x) \uparrow \lceil x' \Rightarrow e \rceil$ が計算できずに止まってしまう。コンテキストにすることで、この項部分が計算でき、以下のように簡約を進めることができる。

$$\begin{array}{rl} * \cdots & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow k \rceil)] \,|\, (x \Rightarrow x) \uparrow \lceil x' \Rightarrow e \rceil \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow k \rceil)] \,|\, x \Rightarrow x \,|\, \lceil x' \Rightarrow e \rceil \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow k \rceil)] \,|\, \lceil x' \Rightarrow e \rceil \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, x' \Rightarrow e \,|\, \lceil \_ \Leftarrow k \rceil \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, e[\lceil \_ \Leftarrow k \rceil / x'] \,\rangle \end{array}$$

以上が $\mathcal{C}$ の変換においてコンテキストが必要な理由である。

名前付き項 $[\alpha]\, M$ は単に普通の関数呼び出しと同じように変換される。

$T_f[\![M]\!]$ は関数として変換するために、$T_e[\![M]\!]$ において $\lceil \cdot \rceil$ のつく λ 抽象 $\lambda x.\, M$ の変換は、$T_e[\![\cdot]\!]$ の $\lceil \cdot \rceil$ を外した形となり、付いていないものに関しては $\bar{\cdot}$ を付加した形というだけで、ほぼ、$T_e[\![M]\!]$ と同じ変換内容になっている。

$T_c[\![E[F]]\!]$ もコンテキストに関して注意が必要である。Call-by-value のときとは違って、評価順序を制御するために最初から $[\cdots]$ でパッケージ化する必要がある。

以上の定義を使うと Call-by-value の場合と同様にして、評価文脈 $E[\ ]$ の構造に関する帰納法により、以下の補題を示すことができる。

補題 8.3.1 $\langle\, \bullet \,|\, T_e[\![E[M]]\!] \,\rangle \approx \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \,\rangle$

さらに、この補題を使って次の定理を示すことができる。

定理 8.3.2 $\lambda\mu$ 計算の式 M について $M \rightsquigarrow N$ が成り立ち、かつ $\vdash T[\![M]\!] : +\mathsf{int}$ なら、$T[\![M]\!] \approx T[\![N]\!]$ が成り立つ。

Call-by-value の場合と同様、この定理の証明には次の代入補題と論理関係を使った議論が必要である。

補題 8.3.3 (Call-by-name SLC の代入補題) $T_e[\![M]\!][T_e[\![N]\!]/x] = T_e[\![M[N/x]]\!]$

系 8.3.4 $\lambda\mu$ 計算の式 M について $M \leadsto^* V$ が成り立ち $\vdash T[\![M]\!] : +\mathsf{int}$ なら、$T[\![M]\!] \leadsto^* T[\![V]\!]$ が成り立つ。

上の 補題 8.3.1、 定理 8.3.2、補題 8.3.3 については付録 A にてその証明を詳しく述べる。

8.4　$\lambda\mu$ 計算の変換例

具体的な例を用いて$\lambda\mu$ 計算の挙動が Call-by-name SLC において実現できていることを示す。

1. まず $\lambda\mu$ 計算の式、$((\lambda x.\,x)\,(\lambda y.\,y))\,((\lambda z.\,z)\,(\lambda v.\,v))$ を例にあげる。これは以下の様に簡約が進む。

$$\begin{array}{rcl} (\underline{(\lambda x.\,x)\,(\lambda y.\,y)})\,((\lambda z.\,z)\,(\lambda v.\,v)) & \leadsto & \underline{(\lambda y.\,y)\,((\lambda z.\,z)\,(\lambda v.\,v))} \\ & \leadsto & \underline{(\lambda z.\,z)\,(\lambda v.\,v)} \\ & \leadsto & \lambda v.\,v \end{array}$$

まず Call-by-name の簡約規則より関数部分である $(\lambda x.\,x)\,(\lambda y.\,y)$ が評価され $\lambda y.\,y$ に簡約される。関数部分がそれ以上実行できない形になったので、この関数 $\lambda y.\,y$ に次に引数が β 簡約によって代入されて $(\lambda z.\,z)\,(\lambda v.\,v)$ に置き換わる。さらに β 簡約が行われて $\lambda v.\,v$ が返ってくることがわかる。

これを Call-by-name SCL に変換して実行する。例の式の $\lambda\mu$ 計算における構文は、詳しくは $E = E'[F], M = (\lambda x.\,x)\,(\lambda y.\,y), E' = [\;], F = [\;]\,((\lambda z.\,z)\,(\lambda v.\,v))$ となっている。

この構文を用いて変換規則 $T[\![\cdot]\!]$ を適用すると

$$T[\![((\lambda x.\,x)\,(\lambda y.\,y))\,((\lambda z.\,z)\,(\lambda v.\,v))]\!] = \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![((\lambda x.\,x)\,(\lambda y.\,y))\,((\lambda z.\,z)\,(\lambda v.\,v))]\!]\,\rangle$$

となるが、これは補題 8.3.1 より

$$\begin{array}{rl} & \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![((\lambda x.\,x)\,(\lambda y.\,y))\,((\lambda z.\,z)\,(\lambda v.\,v))]\!]\,\rangle \\ \approx & \langle\, T_c[\![[\;]\,((\lambda z.\,z)\,(\lambda v.\,v))]]\!] \,|\, T_e[\![(\lambda x.\,x)\,(\lambda y.\,y)]\!]\,\rangle \\ = & \langle\, [T_c[\![[\;]]\!] \downarrow T_F[\![[\;]\,((\lambda z.\,z)\,(\lambda v.\,v))]\!]] \,|\, T_f[\![\lambda x.\,x]\!] \uparrow T_e[\![\lambda y.\,y]\!]\,\rangle \\ = & \langle\, [T_c[\![[\;]]\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow (f_x \uparrow T_e[\![(\lambda z.\,z)\,(\lambda v.\,v)]\!]))] \,|\, T_f[\![\lambda x.\,x]\!] \uparrow T_e[\![\lambda y.\,y]\!]\,\rangle \\ = & \langle\, [T_c[\![[\;]]\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow (f_x \uparrow (T_f[\![\lambda z.\,z]\!] \uparrow T_e[\![\lambda v.\,v]\!])))] \,|\, T_f[\![\lambda x.\,x]\!] \uparrow T_e[\![\lambda y.\,y]\!]\,\rangle \\ = & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow ((z \Rightarrow z) \uparrow \lceil v \Rightarrow v \rceil))] \,|\, (x \Rightarrow x) \uparrow \lceil y \Rightarrow y \rceil\,\rangle \end{array}$$

と変換される。これは以下の様に簡約される。

$$
\begin{array}{ll}
 & \langle\,[\bullet \downarrow (\lceil f_x\rceil \Rightarrow f_x \uparrow ((z \Rightarrow z) \uparrow \lceil v \Rightarrow v\rceil))]\,|\,(x \Rightarrow x) \uparrow \lceil y \Rightarrow y\rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\,[\bullet \downarrow (\lceil f_x\rceil \Rightarrow f_x \uparrow ((z \Rightarrow z) \uparrow \lceil v \Rightarrow v\rceil))]\,|\,x \Rightarrow x\,|\,\lceil y \Rightarrow y\rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\,[\bullet \downarrow (\lceil f_x\rceil \Rightarrow f_x \uparrow ((z \Rightarrow z) \uparrow \lceil v \Rightarrow v\rceil))]\,|\,\lceil y \Rightarrow y\rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\,\bullet\,|\,y \Rightarrow y\,|\,(z \Rightarrow z) \uparrow \lceil v \Rightarrow v\rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\,\bullet\,|\,(z \Rightarrow z) \uparrow \lceil v \Rightarrow v\rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\,\bullet\,|\,z \Rightarrow z\,|\,\lceil v \Rightarrow v\rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\,\bullet\,|\,\lceil v \Rightarrow v\rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \lceil v \Rightarrow v\rceil
\end{array}
$$

以上の簡約をみると Call-by-name の簡約規則より、まず変換された関数部分 $(x \Rightarrow x) \uparrow \lceil y \Rightarrow y\rceil$ が評価され、値 $\lceil y \Rightarrow y\rceil$ に簡約される。関数部分がそれ以上実行できない形 $\lceil\cdot\rceil$ になったので、$(context_{\mathrm{n}})$ を用いて関数部分に戻す。この関数 $y \Rightarrow y$ に引数の項部分が β 簡約により代入され、$(z \Rightarrow z) \uparrow \lceil v \Rightarrow v\rceil$ に簡約される。もう一度 β 簡約が行われて $\lceil v \Rightarrow v\rceil$ が返ってくる。これは $\lambda\mu$ 計算と同じ挙動となっていることがわかり、意図した振る舞いが行われている。

2. 次に $\lambda\mu$ 計算の式、$(\mu\alpha.\,(\lambda y.\,4))\,(\lambda\_.\,3)$ を例にあげる。これは以下の様に簡約が進む。

$$
\begin{array}{rcl}
(\mu\alpha.\,(\lambda y.\,4))\,(\lambda\_.\,3) & \rightsquigarrow & \mu\alpha'.\,(\lambda y.\,4)[\lambda x.\,\alpha'\,(x\,(\lambda\_.\,3))/\alpha] \\
 & = & \mu\alpha.\,(\lambda y.\,4) \\
 & \rightsquigarrow & (\lambda y.\,4)[\lambda x'.\,\mathcal{A}\,x'/\alpha] \\
 & = & \lambda y.\,4
\end{array}
$$

上の式は $\mu\alpha.\,(\lambda y.\,4)$ の継続である $[\,](\lambda\_.\,3)$ が α に渡され、捨てられていることがわかる。これを Call-by-name SCL に変換して実行する。例の式の$\lambda\mu$ 計算における構文は、詳しくは $E = [\,], M = (\mu\alpha.\,(\lambda y.\,4))\,(\lambda\_.\,3)$ となっている。

この構文を用いて変換規則 $T[\![\cdot]\!]$ を適用し、以下の様に簡約される。

$$
\begin{aligned}
& T[\![(\mu\alpha.\,(\lambda y.\,4))\,(\lambda\_.\,3)]\!] \\
= \; & \langle \bullet \,|\, T_e[\![(\mu\alpha.\,(\lambda y.\,4))\,(\lambda\_.\,3)]\!] \,\rangle \\
= \; & \langle \bullet \,|\, T_f[\![\mu\alpha.\,(\lambda y.\,4)]\!] \uparrow T_e[\![\lambda\_.\,3]\!] \,\rangle \\
= \; & \langle \bullet \,|\, T_f[\![\mathcal{C}\,(\lambda\alpha.\,(\lambda y.\,4))]\!] \uparrow T_e[\![\lambda\_.\,3]\!] \,\rangle \\
= \; & \langle \bullet \,|\, \overline{(T_f[\![\mathcal{C}]\!] \uparrow T_e[\![\lambda\alpha.\,(\lambda y.\,4)]\!])} \uparrow T_e[\![\lambda\_.\,3]\!] \,\rangle \\
= \; & \langle \bullet \,|\, \overline{((y' \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y' \rceil)]) \uparrow \lceil \alpha \Rightarrow \lceil y \Rightarrow 4 \rceil \rceil)} \uparrow \lceil \_ \Rightarrow 3 \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow \; & \langle \bullet \,|\, \overline{((y' \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y' \rceil)]) \uparrow \lceil \alpha \Rightarrow \lceil y \Rightarrow 4 \rceil \rceil)} \,|\, \lceil \_ \Rightarrow 3 \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow \; & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Rightarrow 3 \rceil)] \,|\, (y' \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y' \rceil)]) \uparrow \lceil \alpha \Rightarrow \lceil y \Rightarrow 4 \rceil \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow \; & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Rightarrow 3 \rceil)] \,|\, y' \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y' \rceil)] \,|\, \lceil \alpha \Rightarrow \lceil y \Rightarrow 4 \rceil \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow \; & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Rightarrow 3 \rceil)] \rceil)] \,|\, \lceil \alpha \Rightarrow \lceil y \Rightarrow 4 \rceil \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow \; & \langle \bullet \,|\, \alpha \Rightarrow \lceil y \Rightarrow 4 \rceil \,|\, \lceil \_ \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Rightarrow 3 \rceil)] \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow \; & \langle \bullet \,|\, \lceil y \Rightarrow 4 \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow \; & \lceil y \Rightarrow 4 \rceil
\end{aligned}
$$

以上の簡約をみると Call-by-name の簡約規則により変換された $\lceil \_ \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Rightarrow 3 \rceil)] \rceil$ が α に渡され、捨てられていることがわかる。$\lambda\mu$ 計算の変換においても、意図したふるまいを見ることができる。

第9章　関連研究

SLC は 1989 年に Filinski [5] によって提案された。Filinski は圏論に基づいて SLC を導入し、その Call-by-value 版の表示的意味記述を示している。本論文で示している SLC はそれに基づいて作られており、特に本論文の Call-by-value SLC は Filinski のものと同一であると考えているが、現在のところ厳密な対応関係は示されていない。

項と継続、そして Call-by-value と Call-by-name の双対性については、Curien と Herbelin が $\overline{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ 計算の中で述べている [1]。この仕事は、さらに Wadler の双対計算 [10] へと発展している。しかし、これらの仕事で使われている関数呼び出しは古典論理に関する考察から導かれたもので、通常の関数呼び出しとは異なる形をしている。一方、SLC には自然な形で λ 計算が埋め込まれている。

Felleisen の $\mathcal{C}$ オペレータ（を Call-by-name で解釈したもの）と $\lambda\mu$ 計算が同等であることは de Groote によって示されている [3]。本論文は、同様の結果を両者を SLC に変換することで得たものとなっている。

第10章　まとめと今後の課題

本論文では、Filinski による型付き対称ラムダ計算 SLC を small step semantics で定式化し直し、型に関する基本的な性質を証明するとともに、Felleisen の Λ_C 計算、Parigot の $\lambda\mu$ 計算がそれぞれ Call-by-value、Call-by-name の SLC に変換できることを示した。SLC が提案されたのはかなり前であるが、SLC についての研究は始まったばかりという感じである。本論文は SLC の最も基礎的な部分を定式化し、ふたつの継続を扱う体系を埋め込むことで、SLC がいろいろな継続計算に関する議論を行う際の土台となることを示している。

今後の方向性としては、いろいろなものが考えられる。まず第一に考えられるのは、Wadler の双対計算との関係の解明である。Filinski の提案した SLC では直積と直和が既に入っているので、そこまで合わせて考えれば容易に双対計算との関係がわかってくると期待される。また、それを通して SLC と論理学との関係を追求するのも興味深いテーマである。関連して、Wadler は双対計算と $\lambda\mu$ 計算の間に対応関係があることを示している [11] が、それに対する洞察が得られることも期待される。

本論文で示した埋め込みはもとの言語の型を考慮に入れていないが、Λ_C 計算にも $\lambda\mu$ 計算にもそれぞれ型システムがある。本論文で考えた埋め込みが型的にどうなっているのかを解明するのも面白い。さらに大きなテーマとして、本論文では非限定継続のみを扱って来たが、shift/reset などの限定継続がどのように組み込めるかも検討してみたい。

謝辞

指導教官である、お茶の水女子大学の浅井健一准教授には、基礎から丁寧にご指導いただき、大変多くのことを学ぶことができました。お忙しい中でも納得いくまで付き合っていただき、ありがとうございました。学会やプログラミングコンテストにも参加でき、充実した研究生活をおくることができました。

副査を引き受けていただいた金子晃教授には、沢山のアドバイスをいただき、大変感謝しております。

筑波大学の亀山幸義先生には、$\lambda\mu$ 計算を始めとして多くのことについて教えて頂きました。ここに記して感謝致します。

研究室の先輩方には学業や就職活動について、いつも気にかけていただき、大変心強かったです。研究室以外でも教授、先輩方、友人のサポートをいただき、研究室に学生が私１人であった時期も安心して大学生活をおくることができました。

そして、朝早くから遅くまで大学にばかりいる生活を支え、大学院まで進学させてくれた家族に感謝致します。大学６年間で学んだことを、これから活かしていきたいと思います。

参考文献

[1] Curien, P.-L., and H. Herbelin "The Duality of Computation," *Proceedings of the ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP'00)*, pp. 233–243 (September 2000).

[2] Danvy, O., and A. Filinski "Representing Control, a Study of the CPS Transformation," *Mathematical Structures in Computer Science*, Vol. 2, No. 4, pp. 361–391 (December 1992).

[3] de Groote, P. "On the Relation between the $\lambda\mu$-Calculus and the Syntactic Theory of Sequential Control," In F. Pfenning, editor, *Logic Programming and Automated Reasoning (LNCS 822)*, pp. 31–43 (July 1994).

[4] Felleisen, M., and R. Hieb "The Revised Report on the Syntactic Theories of Sequential Control and State," *Theoretical Computer Science*, Vol. 103, No. 2, pp. 235–271 (September 1992).

[5] Filinski, A. "Declarative Continuations and Categorical Duality," Master's thesis, DIKU Report 89/11, University of Copenhagen (August 1989).

[6] Parigot, M. "$\lambda\mu$-calculus: An Algorithmic Interpretation of Classical Natural Deduction," In A. Voronkov, editor, *Logic Programming and Automated Reasoning (LNCS 624)*, pp. 190–201 (July 1992).

[7] Plotkin, G. D. "Call-by-name, call-by-value, and the λ-calculus," *Theoretical Computer Science*, Vol. 1, No. 2, pp. 125–159 (December 1975).

[8] 阪上紗里, 浅井健一「対称 λ 計算の基礎理論」第 10 回プログラミングおよびプログラミング言語ワークショップ (PPL 2008), pp. 111–125 (March 2008).

[9] Sumii, E., and B. C. Pierce "The Cryptographic λ-Calculus: Syntax, Semantics, Type System and Logical Relations," 第3回プログラミングおよびプログラミング言語ワークショップ (PPL 2001), pp. 97–108 (March 2001).

[10] Wadler, P. "Call-by-value is dual to call-by-name," *Proceedings of the eighth ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP'03)*, pp. 189–201 (August 2003).

[11] Wadler, P. "Call-by-value is dual to call-by-name, Reloaded," In J. Giesl, editor, *Term Rewriting and Applications (LNCS 3467)*, pp. 185–203 (April 2005).

付 録A　　証明

A.1　SLCに関する証明

A.1.1　SLCについての定理と補題

定理 A.1.1 (Progress)　1. $\langle\, c \,|\, f \,|\, e \,\rangle$: +int ならば、ある c', f', e' が存在して $\langle\, c \,|\, f \,|\, e \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, f' \,|\, e' \,\rangle$ または $\langle\, c \,|\, f \,|\, e \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, e' \,\rangle$ である。

2. $\langle\, c \,|\, e \,\rangle$: +int ならば、それは $\langle\, \bullet \,|\, v' \,\rangle$ という形であるか、ある c', f', e' が存在して $\langle\, c \,|\, e \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, f' \,|\, e' \,\rangle$ である。

証明

簡約規則に関する場合分けにより証明する。

1. $\langle\, c \,|\, f \,|\, e \,\rangle$: +int の場合を証明する。

   $\langle\, c \,|\, f \,|\, e \,\rangle$: +int ならば c, f, e は任意で $\langle\, c \downarrow f \,|\, e \,\rangle$ 又は $\langle\, c \,|\, f \uparrow e \,\rangle$ に簡約することができる。

   さらに f の場合分けにより、以下のようにも簡約される。

   (i) $f = x \Rightarrow e'$ のとき $\langle\, c \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, e \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c \,|\, e'[e/x] \,\rangle$
   (ii) $f = y \Leftarrow c'$ のとき $\langle\, c \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, e \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[c/y] \,|\, e \,\rangle$
   (iii) $f = \overline{e'}$ のとき $\langle\, c \,|\, \overline{e'} \,|\, e \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c \,|\, \lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e \,|\, e' \,\rangle$
   (vi) $f = \underline{c'}$ のとき $\langle\, c \,|\, \underline{c'} \,|\, e \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, \lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y \,|\, e \,\rangle$

   以上により、1. $\langle\, c \,|\, f \,|\, e \,\rangle$: +int の場合、命題を満たす。

2. $\langle\, c \,|\, e \,\rangle$: +int の場合を証明する。

   (i) $c = \bullet$ かつ $e = v$ の場合。$\langle\, \bullet \,|\, v \,\rangle$ であるので、命題を満たす。
   (ii) c は任意で $e = f \uparrow e'$ の場合。$\langle\, c \,|\, f \uparrow e' \,\rangle$: +int ならば $\langle\, c \,|\, f \,|\, e' \,\rangle$ に簡約される。
   (iii) $c = c' \downarrow f$ で e が任意のとき $\langle\, c' \downarrow f \,|\, e \,\rangle$: +int ならば $\langle\, c' \,|\, f \,|\, e \,\rangle$ に簡約される。

   c, e の他の組み合わせは型エラーとなり、$\langle\, c \,|\, e \,\rangle$ は型を持たない。以上により 2. $\langle\, c \,|\, e \,\rangle$: +int の場合、命題を満たす。

1, 2 が命題を満たすので、Progress は成り立つ。 □

定理 A.1.2 (Preservation) 1. $\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}$ であるとき、$\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle$ ならば $\langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle : +\mathsf{int}$ であり、$\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, e' \rangle$ ならば $\langle c' \,|\, e' \rangle : +\mathsf{int}$ である。

2. $\langle c \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}$ であるとき、$\langle c \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle$ ならば $\langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle : +\mathsf{int}$ である。

証明

簡約規則に関する場合分けにより証明する。

1. Preservation 1 を証明する。

c, f, e は任意で、$\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle$ は $+\mathsf{int}$ 型をもつとすると、定義より

$$\frac{\Gamma \vdash c : \neg B \quad \Gamma \vdash f : \{ {}^{+A \to +B}_{\neg B \to \neg A} \quad \Gamma \vdash e : +A}{\Gamma \vdash \langle c \,|\, f \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}} \cdots *$$

となる。このとき $\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle$ は以下の (i)(ii) に簡約される。

(i) $\langle c \,|\, f \uparrow e \rangle$ に簡約されたとき、これは定義から

$$\frac{\Gamma \vdash c : \neg B \quad \dfrac{\Gamma \vdash f : +\{ {}^{+A \to +B}_{\neg B \to \neg A} \quad \Gamma \vdash e : +A}{\Gamma \vdash f \uparrow e : +B}}{\Gamma \vdash \langle c \,|\, f \uparrow e \rangle : +\mathsf{int}}$$

となる。このとき、この証明木の二段目以上は∗より成り立っているので、最下段も成り立つ。

(ii) $\langle c \downarrow f \,|\, e \rangle$ に簡約されたとき、これは定義から

$$\frac{\dfrac{\Gamma \vdash f : \{ {}^{+A \to +B}_{\neg B \to \neg A} \quad \Gamma \vdash c : \neg B}{\Gamma \vdash c \downarrow f : \neg A} \quad \Gamma \vdash e : +A}{\Gamma \vdash \langle c \downarrow f \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}}$$

となる。このとき、この証明木の二段目以上は∗より成り立っているので、最下段も成り立つ。

さらに (c, e は任意で) f の場合わけにより、$\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle$ は (i)(ii) に加えて次の (iii)(iv)(v)(vi) に簡約される。

(iii) $f = x \Rightarrow e'$ の場合。$\langle c \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, e \rangle$ は $+\mathsf{int}$ 型をもつとすると、定義より

$$\frac{\Gamma \vdash c : \neg B \quad \dfrac{\Gamma, x : +A \vdash e' : +B}{\Gamma \vdash x \Rightarrow e' : \{ {}^{+A \to +B}_{\neg B \to \neg A}} \quad \Gamma \vdash e : +A}{\Gamma \vdash \langle c \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}} \cdots *$$

が成り立つ。$\langle\, c \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, e \,\rangle$ は $\langle\, c \,|\, e'[e/x] \,\rangle$ に簡約されると、これは定義から

$$\dfrac{\Gamma \vdash c : \neg B \quad \Gamma \vdash e'[e/x] : +B}{\Gamma \vdash \langle\, c \,|\, e'[e/x] \,\rangle : +\mathsf{int}}$$

となる。このときこの証明木の上段は$*$と SLC の項に関する代入補題 (補題 A.1.3 の (1)(e)) により成り立っているので、下段も成り立つ。

(iv) $f = y \Leftarrow c'$ の場合。$\langle\, c \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, e \,\rangle$ は $+\mathsf{int}$ 型をもつとすると、定義より

$$\dfrac{\Gamma \vdash c : \neg B \quad \dfrac{\Gamma, y : \neg B \vdash c' : \neg A}{\Gamma \vdash y \Leftarrow c' : \{\substack{+A \to +B \\ \neg B \to \neg A}} \quad \Gamma \vdash e : +A}{\Gamma \vdash \langle\, c \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, e \,\rangle : +\mathsf{int}} \cdots *$$

が成り立つ。$\langle\, c \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, e \,\rangle$ は $+\mathsf{int}$ に簡約されると、これは定義から

$$\dfrac{\Gamma \vdash c'[c/y] : \neg A \quad \Gamma \vdash e : +A}{\Gamma \vdash \langle\, c'[c/y] \,|\, e \,\rangle : +\mathsf{int}}$$

となる。このときこの証明木の上段は$*$と SLC の継続に関する代入補題 (補題 A.1.3 の (2)(c)) の代入補題により成り立っているので、下段も成り立つ。

(v) $f = \overline{e'}$ の場合。$\langle\, c \,|\, \overline{e'} \,|\, e \,\rangle$ は $+\mathsf{int}$ 型をもつとすると、定義より

$$\dfrac{\Gamma \vdash c : \neg B \quad \dfrac{\Gamma \vdash e' : +(A \to B)}{\Gamma \vdash \overline{e'} : \{\substack{+A \to +B \\ \neg B \to \neg A}} \quad \Gamma \vdash e : +A}{\Gamma \vdash \langle\, c \,|\, \overline{e'} \,|\, e \,\rangle : +\mathsf{int}} \cdots *$$

が成り立つ。$\langle\, c \,|\, \overline{e'} \,|\, e \,\rangle$ は 他に現れない変数 f_x を使って $\langle\, c \,|\, \lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e \,|\, e' \,\rangle$ に簡約されると、これは定義から

$$\dfrac{\Gamma \vdash c : \neg B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, f_x : \{\substack{+A \to +B \\ \neg B \to \neg A} \vdash f_x : \{\substack{+A \to +B \\ \neg B \to \neg A}}{\Gamma, \lceil f_x \rceil : +(A \to B) \vdash f_x : \{\substack{+A \to +B \\ \neg B \to \neg A}} \quad \Gamma, \lceil f_x \rceil : +(A \to B) \vdash e : +A}{\Gamma, \lceil f_x \rceil : +(A \to B) \vdash f_x \uparrow e : +B}}{\Gamma \vdash \lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e : \{\substack{+(A \to B) \to +B \\ \neg B \to \neg (A \to B)})} \qquad \Gamma \vdash e : +(A \to B)}{\Gamma \vdash \langle\, c \,|\, \lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e \,|\, e' \,\rangle : +\mathsf{int}}$$

となる。このときこの証明木の二段目以上は$*$により成り立っているので、最下段も成り立つ。

(vi) $f = \underline{c}$ の場合。$+\mathsf{int}$ 型をもつとすると

$$\dfrac{\Gamma \vdash c : \neg B \quad \dfrac{\Gamma \vdash c' : \neg (A - B)}{\Gamma \vdash \underline{c'} : \{\substack{+A \to +B \\ \neg B \to \neg A}} \quad \Gamma \vdash e : +A}{\Gamma \vdash \langle\, c \,|\, \underline{c'} \,|\, e \,\rangle : +\mathsf{int}} \cdots *$$

が成り立つ。$\langle\, c \,|\, \overline{c'} \,|\, e \,\rangle$ は 他に現れない変数 f_y を使って $\langle\, c' \,|\, \lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y \,|\, e \,\rangle$ に簡約されると、これは定義から

$$\dfrac{\Gamma \vdash c' : \neg(A-B) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, f_y : \{ {}^{+A \to +B}_{\neg B \to \neg A} \vdash f_y : \{ {}^{+A \to +B}_{\neg B \to \neg A}}{\Gamma, \lfloor f_y \rfloor : \neg(A-B) \vdash f_y : \{ {}^{+A \to +B}_{\neg B \to \neg A} \qquad \Gamma, \lfloor f_y \rfloor : \neg(A-B) \vdash c : \neg B}}{\Gamma, \lfloor f_y \rfloor : \neg(A-B) \vdash c \downarrow f_y : \neg A}}{\Gamma \vdash \lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow y : \{ {}^{+A \to +(A-B)}_{\neg(A-B) \to \neg A})} \qquad \Gamma \vdash e : +A}{\Gamma \vdash \langle\, c' \,|\, \lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y \,|\, e \,\rangle : +\mathsf{int}}$$

となる。このときこの証明木の二段目以上は $*$ により成り立っているので、最下段成り立つ。

1. の (i)(ii)、(2) の (iii)〜(vi) が命題を満たすので Presevation 1 が成り立つ。

2. Preservation 2 を証明する。

(i) $c = \bullet$　かつ　$e = v (= x\ or\ \lceil f \rceil)$　の場合。$\langle\, \bullet \,|\, v \,\rangle$ であり、v に簡約されてしまう。

(ii) c は任意で $e = f \uparrow e'$ の場合。$\langle\, c \,|\, f \uparrow e' \,\rangle$ は $+\mathsf{int}$ 型をもつとすると、定義より

$$\dfrac{\Gamma \vdash c : \neg B \qquad \dfrac{\Gamma \vdash f : \{ {}^{+A \to +B}_{\neg B \to \neg A} \qquad \Gamma \vdash e' : +A}{\Gamma \vdash f \uparrow e' : +B}}{\Gamma \vdash \langle\, c \,|\, f \uparrow e' \,\rangle : +\mathsf{int}} \cdots *$$

が成り立つ。$\langle\, c \,|\, f \uparrow e' \,\rangle$ は $\langle\, c \,|\, f \,|\, e' \,\rangle$ に簡約され、これは定義から

$$\dfrac{\Gamma \vdash c : \neg B \quad \Gamma \vdash f : \{ {}^{+A \to +B}_{\neg B \to \neg A} \quad \Gamma \vdash e' : +A}{\Gamma \vdash \langle\, c \,|\, f \,|\, e' \,\rangle : +\mathsf{int}}$$

となる。このとき、この証明木の上段は、$*$ により成り立っているので、下段も成り立つ。

(iii) $c = c' \downarrow f$ で、 e が任意の場合。$\langle\, c' \downarrow f \,|\, e \,\rangle$ は $+\mathsf{int}$ 型をもつとすると、定義より

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash f : \{ {}^{+A \to +B}_{\neg B \to \neg A} \qquad \Gamma \vdash c' : \neg B}{\Gamma \vdash c' \downarrow f : \neg A} \qquad \Gamma \vdash e : +A}{\Gamma \vdash \langle\, c' \downarrow f \,|\, e \,\rangle : +\mathsf{int}} \cdots *$$

が成り立つ。$\langle\, c' \downarrow f \,|\, e \,\rangle$ は $\langle\, c' \,|\, f \,|\, e \,\rangle$ に簡約され、これは定義から

$$\dfrac{\Gamma \vdash c' : \neg B \quad \Gamma \vdash f : \{ {}^{+A \to +B}_{\neg B \to \neg A} \quad \Gamma \vdash e : +A}{\Gamma \vdash \langle\, c \,|\, f \,|\, e \,\rangle : +\mathsf{int}}$$

となる。このとき、この証明木の上段は $*$ より成り立っているので、下段も成り立つ。

(i)〜(iii) より Preservation 2 は成り立つ、

Preservation 1, 2 より、Preservation は成り立つ。 □

補題 A.1.3 [SLC の代入補題] SLC の代入補題は、項に関する代入補題と、継続に関する代入補題がある。

(1) 項に関する代入補題

- **(e)** $\Gamma, x : +A \vdash e' : +B$ で $\Gamma \vdash e : +A$ ならば、$\Gamma \vdash e'[e/x] : +B$ が成り立つ。
- **(f)** $\Gamma, x : +A \vdash f : \left\{\begin{smallmatrix}+A\to+B\\ \neg B\to\neg A\end{smallmatrix}\right.$ で $\Gamma \vdash e : +A$ ならば、$\Gamma \vdash f[e/x] : \left\{\begin{smallmatrix}+A\to+B\\ \neg B\to\neg A\end{smallmatrix}\right.$ が成り立つ。
- **(c)** $\Gamma, x : +A \vdash c : \neg B$ で $\Gamma \vdash e : +A$ ならば、$\Gamma \vdash c[e/x] : \neg B$ が成り立つ。

(2) 継続に関する代入補題

- **(e)** $\Gamma, y : \neg B \vdash e : +A$ で $\Gamma \vdash c : \neg B$ ならば、$\Gamma \vdash e[c/y] : +A$ が成り立つ。
- **(f)** $\Gamma, y : \neg B \vdash f : \left\{\begin{smallmatrix}+A\to+B\\ \neg B\to\neg A\end{smallmatrix}\right.$ で $\Gamma \vdash c : \neg B$ ならば、$\Gamma \vdash f[c/y] : \left\{\begin{smallmatrix}+A\to+B\\ \neg B\to\neg A\end{smallmatrix}\right.$ が成り立つ。
- **(c)** $\Gamma, y : \neg B \vdash c' : \neg A$ で $\Gamma \vdash c : \neg B$ ならば、$\Gamma \vdash c'[c/y] : \neg A$ が成り立つ。

証明

型の構造に関する帰納法により証明する。

(1) 項に関する代入補題

(e) (i) $\Gamma, x : +A \vdash x : +A$ の場合。$\Gamma \vdash e : +A$ より $e'[e/x] = x[e/x] = e : +A$ となり命題を満たす。

(ii)

$$\frac{\Gamma, x : +A \vdash f : \left\{\begin{smallmatrix}+A'\to+B\\ \neg B\to\neg A'\end{smallmatrix}\right. \quad \Gamma, x : +A \vdash e'' : +A'}{\Gamma, x : +A \vdash f \uparrow e'' : +B}$$

の場合。$\Gamma \vdash e : +A$ より $\Gamma, x : +A \vdash f : \left\{\begin{smallmatrix}+A'\to+B\\ \neg B\to\neg A'\end{smallmatrix}\right.$ に関する帰納法の仮定から $\Gamma \vdash f[e/x] : \left\{\begin{smallmatrix}+A'\to+B\\ \neg B\to\neg A'\end{smallmatrix}\right.$ が成り立ち、$\Gamma, x : +A \vdash e'' : +A'$ に関する帰納法の仮定から $\Gamma \vdash e''[e/x] : +A'$ が成り立つ。これより

$$\frac{\Gamma \vdash f[e/x] : \left\{\begin{smallmatrix}+A'\to+B\\ \neg B\to\neg A'\end{smallmatrix}\right. \quad \Gamma \vdash e''[e/x] : +A'}{\Gamma \vdash f[e/x] \uparrow e''[e/x] : +B}$$

が成り立つ。この証明木の最下段の項は $f[e/x] \uparrow e''[e/x] = (f \uparrow e'')[e/x] = e'[e/x]$ であるので、命題を満たす。

(iii)

$$\frac{\Gamma, x : +A \vdash f : \left\{\begin{smallmatrix}+A'\to+B\\ \neg B\to\neg A'\end{smallmatrix}\right.}{\Gamma, x : +A \vdash \lceil f \rceil : +(A' \to B)}$$

の場合。$\Gamma \vdash e : +A$ より $\Gamma, x : +A \vdash f : \{^{+A' \to +B}_{\neg B \to \neg A'}$ に関する帰納法の仮定から $\Gamma \vdash f[e/x] : \{^{+A' \to +B}_{\neg B \to \neg A'}$ が成り立つ。これより

$$\frac{\Gamma \vdash f[e/x] : \{^{+A' \to +B}_{\neg B \to \neg A'}}{\Gamma \vdash \lceil f[e/x] \rceil : +(A' \to B)}$$

が成り立つ。この証明木の下段の項は $\lceil f[e/x] \rceil = \lceil f \rceil [e/x] = e'[e/x]$ であるので、命題を満たす。

(f) (i) $(x \neq x')$

$$\frac{\Gamma, x : +A, x' : +A' \vdash e' : +B}{\Gamma, x : +A \vdash x' \Rightarrow e' : \{^{+A' \to +B}_{\neg B \to \neg A'}}$$

の場合。$\Gamma \vdash e : +A$ より $\Gamma, x : +A, x' : +A' \vdash e' : +B$ に関する帰納法の仮定から $\Gamma, x' : +A' \vdash e'[e/x] : +B$ が成り立つ。これより

$$\frac{\Gamma, x' : +A' \vdash e'[e/x] : +B}{\Gamma \vdash x' \Rightarrow e'[e/x] : \{^{+A' \to +B}_{\neg B \to \neg A'}}$$

が成り立つ。この証明木の下段の項は $x' \Rightarrow e'[e/x] = (x' \Rightarrow e')[e/x] = f[e/x]$ であるので、命題を満たす。

(i') $(x = x')$

$$\frac{\Gamma, x' : +A' \vdash e' : +B}{\Gamma, x : +A \vdash x' \Rightarrow e' : \{^{+A' \to +B}_{\neg B \to \neg A'}}$$

の場合。$(x' \Rightarrow e')[e/x] = x' \Rightarrow e' : +B$ であるので、命題を満たす。

(ii)

$$\frac{\Gamma, x : +A \vdash e' : +(A' \to B)}{\Gamma, x : +A \vdash \overline{e'} : \{^{+A' \to +B}_{\neg B \to \neg A'}}$$

の場合。$\Gamma \vdash e : +A$ より $\Gamma, x : +A \vdash e' : +(A' \to B)$ に関する帰納法の仮定から $\Gamma \vdash e'[e/x] : +(A' \to B)$ が成り立つ。これより

$$\frac{\Gamma \vdash e'[e/x] : +(A' \to B)}{\Gamma \vdash \overline{e'[e/x]} : \{^{+A' \to +B}_{\neg B \to \neg A'}}$$

が成り立つ。この証明木の下段の項は $\overline{e'[e/x]} = \overline{e'}[e/x] = f[e/x]$ であるので、命題を満たす。

(iii)

$$\frac{\Gamma, x : +A, y : \neg B \vdash c : \neg A'}{\Gamma, x : +A \vdash y \Leftarrow c : \{^{+A' \to +B}_{\neg B \to \neg A'}}$$

の場合。$\Gamma \vdash e : +A$ より $\Gamma, x : +A, y : \neg B \vdash c : \neg A'$ に関する帰納法の仮定から $\Gamma, y : \neg B \vdash c[e/x] : \neg A'$ が成り立つ。これより

$$\frac{\Gamma, y : \neg B \vdash c[e/x] : \neg A'}{\Gamma \vdash y \Leftarrow c[e/x] : \{\substack{+A'\to+B\\ \neg B\to\neg A'}}$$

が成り立つ。この証明木の下段の項は $y \Leftarrow c[e/x] = (y \Leftarrow c)[e/x] = f[e/x]$ であるので、命題を満たす。

(iv)

$$\frac{\Gamma, x : +A \vdash c : \neg(A' - B)}{\Gamma, x : +A \vdash \underline{c} : \{\substack{+A'\to+B\\ \neg B\to\neg A'}}$$

の場合。$\Gamma \vdash e : +A$ より $\Gamma, x : +A \vdash c : \neg(A' - B)$ に関する帰納法の仮定から $\Gamma \vdash c[e/x] : \neg(A' - B)$ が成り立つ。これより

$$\frac{\Gamma \vdash c[e/x] : \neg(A' - B)}{\Gamma \vdash \underline{c[e/x]} : \{\substack{+A'\to+B\\ \neg B\to\neg A'}}$$

が成り立つ。この証明木の下段の項は $\underline{c[e/x]} = \underline{c}[e/x] = f[e/x]$ であるので、命題を満たす。

(c) (i) $\Gamma, y : \neg B, x : +A \vdash y : \neg B$ の場合。$c[e/x] = y[e/x] = y : \neg B$ となり、命題を満たす。

(ii)

$$\frac{\Gamma, x : +A \vdash f : \{\substack{+A'\to+B\\ \neg B\to\neg A'} \quad \Gamma, x : +A \vdash c' : \neg B}{\Gamma, x : +A \vdash c' \downarrow f : \neg A'}$$

の場合。$\Gamma \vdash e : +A$ より $\Gamma, x : +A \vdash f : \{\substack{+A'\to+B\\ \neg B\to\neg A'}$ に関する帰納法の仮定から $\Gamma \vdash f[e/x] : \{\substack{+A'\to+B\\ \neg B\to\neg A'}$ が成り立ち、$\Gamma, x : +A \vdash c : \neg B$ に関する帰納法の仮定から $\Gamma \vdash c'[e/x] : \neg B$ が成り立つ。これより

$$\frac{\Gamma \vdash f[e/x] : \{\substack{+A'\to+B\\ \neg B\to\neg A'} \quad \Gamma \vdash c'[e/x] : \neg B}{\Gamma \vdash c'[e/x] \downarrow f[e/x] : \neg A'}$$

が成り立つ。この証明木の下段の項は $c'[e/x] \downarrow f[e/x] = (c' \downarrow f)[e/x] = c[e/x]$ であるので、命題を満たす。

(iii)

$$\frac{\Gamma, x : +A \vdash f : \{\substack{+A'\to+B\\ \neg B\to\neg A'}}{\Gamma, x : +A \vdash \lfloor f \rfloor : \neg(A' - B)}$$

の場合。$\Gamma \vdash e : +A$ より $\Gamma, x : +A \vdash f : \{\substack{+A'\to+B\\ \neg B\to\neg A'}$ に関する帰納法の仮定から $\Gamma \vdash f[e/x] : \{\substack{+A'\to+B\\ \neg B\to\neg A'}$ が成り立つ。これより

$$\frac{\Gamma \vdash f[e/x] : \{\substack{+A'\to+B\\ \neg B\to\neg A'}}{\Gamma \vdash \lfloor f[e/x] \rfloor : \neg A' - B}$$

が成り立つ。この証明木の下段の項は $\lfloor f[e/x]\rfloor = \lfloor f\rfloor[e/x] = c[e/x]$ であるので、命題を満たす。

(e)(f)(c) より、(1) 項に関する代入補題は成り立つ。

(2) 継続に関する代入補題

(e) (i) $\Gamma, x : +A, y : \neg B \vdash x : +A$ の場合。$e[c/y] = x[c/y] = x : +A$ となり、命題を満たす。

(ii)

$$\frac{\Gamma, c : \neg B \vdash f : \{^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A} \quad \Gamma, y : \neg A \vdash e' : A}{\Gamma, c : \neg B \vdash f \uparrow e' : +B'}$$

の場合。$\Gamma \vdash c : \neg B$ より、$\Gamma, c : \neg B \vdash f : \{^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}$ に関する帰納法の仮定から $\Gamma \vdash f[c/y] : \{^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}$ が成り立ち、$\Gamma, c : \neg B \vdash e' : A$ に関する帰納法の仮定から $\Gamma \vdash e'[c/y] : +A$ が成り立つ。これより

$$\frac{\Gamma \vdash f[c/y] : \{^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A} \quad \Gamma \vdash e'[c/y] : +A}{\Gamma \vdash f[c/y] \uparrow e'[c/y] : +B'}$$

が成り立つ。この証明木の最下段の項は $f[c/y] \uparrow e'[c/y] = (f \uparrow e')[c/y] = e[c/y]$ であるので、命題を満たす。

(iii)

$$\frac{\Gamma, y : \neg B \vdash f : \{^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}}{\Gamma, y : \neg B \vdash \lceil f\rceil : +(A \to B')}$$

の場合。$\Gamma \vdash c : \neg B$ より $\Gamma, y : \neg B \vdash f : \{^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}$ に関する帰納法の仮定から $\Gamma \vdash f[c/y] : \{^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}$ が成り立つ。これより

$$\frac{\Gamma \vdash f[c/y] : \{^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}}{\Gamma \vdash \lceil f[c/y]\rceil : +(A \to B')}$$

が成り立つ。この証明木の下段の項は $\lceil f[c/y]\rceil = \lceil f\rceil[c/y] = e[c/y]$ であるので、命題を満たす。

(f) (i)

$$\frac{\Gamma, y : \neg B, x : +A \vdash e : +B'}{\Gamma, y : \neg B \vdash x \Rightarrow e : \{^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}}$$

の場合。$\Gamma \vdash c : \neg B$ より $\Gamma, y : \neg B, x : +A \vdash e : +B'$ に関する帰納法の仮定から $\Gamma, x : +A \vdash e[c/y] : +B'$ が成り立つ。これより

$$\frac{\Gamma, x : +A \vdash e[c/y] : +B'}{\Gamma \vdash x \Rightarrow e[c/y] : \{^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}}$$

が成り立つ。この証明木の下段の項は $x \Rightarrow e[c/y] = (x \Rightarrow e)[c/y] = f[c/y]$ であるので、命題を満たす。

(ii)

$$\frac{\Gamma, y : \neg B \vdash e : +(A \to B')}{\Gamma, y : \neg B \vdash \overline{e} : \{ {}^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}}$$

の場合。$\Gamma \vdash c : \neg B$ より $\Gamma, y : \neg B \vdash e : +(A \to B')$ に関する帰納法の仮定から $\Gamma \vdash e[c/y] : +(A \to B')$ が成り立つ。これより

$$\frac{\Gamma \vdash e[c/y] : +(A \to B')}{\Gamma \vdash \overline{e[c/y]} : \{ {}^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}}$$

が成り立つ。この証明木の下段の項は $\overline{e[c/y]} = \overline{e}[c/y] = f[c/y]$ であるので、命題を満たす。

(iii) $(y \neq y')$

$$\frac{\Gamma, y : \neg B, y' : \neg B' \vdash c' : \neg A}{\Gamma, y : \neg B \vdash y' \Leftarrow c' : \{ {}^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}}$$

の場合。$\Gamma \vdash c : \neg B$ より $\Gamma, y : \neg B, y' : \neg B' \vdash c' : \neg A$ に関する帰納法の仮定から $\Gamma, y : \neg B \vdash c'[c/y] : \neg A$ が成り立つ。これより

$$\frac{\Gamma, y' : \neg B' \vdash c'[c/y] : \neg A}{\Gamma \vdash y' \Leftarrow c'[c/y] : \{ {}^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}}$$

が成り立つ。この証明木の下段の項は $y' \Leftarrow c'[c/y] = (y' \Leftarrow c')[c/y] = f[c/y]$ であるので、命題を満たす。

(iii') $(y = y')$

$$\frac{\Gamma, y' : \neg B' \vdash c' : \neg A}{\Gamma, y : \neg B \vdash y' \Leftarrow c' : \{ {}^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}}$$

の場合。$(y' \Leftarrow c')[c/y] = y' \Leftarrow c' : +B$ であるので、命題を満たす。

(iv)

$$\frac{\Gamma, y : \neg B \vdash c' : \neg(A - B')}{\Gamma, y : \neg B \vdash \underline{c'} : \{ {}^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}}$$

の場合。$\Gamma \vdash c : \neg B$ より $\Gamma, y : \neg B \vdash c' : \neg(A - B')$ に関する帰納法の仮定から $\Gamma \vdash c'[c/y] : \neg(A - B')$ が成り立つ。これより

$$\frac{\Gamma \vdash c'[c/y] : \neg(A - B')}{\Gamma \vdash \underline{c'[c/y]} : \{ {}^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}}$$

が成り立つ。この証明木の下段の項は $\underline{c'[c/y]} = \underline{c'}[c/y] = f[c/y]$ であるので、命題を満たす。

(c) (i) $\Gamma, y : \neg B \vdash y : \neg B$ の場合。$\Gamma \vdash c : \neg B$ より $c'[c/y] = y[c/y] = c : \neg B$　となり、命題を満たす。

(ii)

$$\frac{\Gamma, y : \neg B \vdash f : \{^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A} \quad \Gamma, y : \neg B \vdash c'' : \neg B'}{\Gamma, y : \neg B \vdash c'' \downarrow f : \neg A}$$

の場合。$\Gamma \vdash c : \neg B$ より $\Gamma, y : \neg B \vdash f : \{^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}$ に関する帰納法の仮定から $\Gamma \vdash f[c/y] : \{^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}$ が成り立ち、$\Gamma, y : \neg B \vdash c'' : \neg B'$ に関する帰納法の仮定から $\Gamma \vdash c''[c/y] : \neg B'$ が成り立つ。これより

$$\frac{\Gamma \vdash f[c/y] : \{^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A} \quad \Gamma \vdash c''[c/y] : \neg B'}{\Gamma \vdash c''[c/y] \downarrow f[c/y] : \neg A}$$

が成り立つ。この証明木の下段の項は $c''[c/y] \downarrow f[c/y] = (c'' \downarrow f)[c/y] = c'[c/y]$ であるので、命題を満たす。

(iii)

$$\frac{\Gamma, y : \neg B \vdash f : \{^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}}{\Gamma, y : \neg B \vdash \lfloor f \rfloor : \neg(A - B')}$$

の場合。$\Gamma \vdash c : \neg B$ より $\Gamma, y : \neg B \vdash f : \{^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}$ に関する帰納法の仮定から $\Gamma \vdash f[c/y] : \{^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}$ が成り立つ。これより

$$\frac{\Gamma \vdash f[c/y] : \{^{+A \to +B'}_{\neg B' \to \neg A}}{\Gamma \vdash \lfloor f[c/y] \rfloor : \neg(A - B')}$$

が成り立つ。この証明木の下段の項は $\lfloor f[c/y] \rfloor = \lfloor f \rfloor[c/y] = c'[c/y]$ であるので、命題を満たす。

(e)(f)(c) より、(2) 継続に関する代入補題は成り立つ。

(1)(2) より SLC の代入補題は成り立つ。 □

非決定性 SLC において、Preservation と Progress を証明したが、Call-by-value Right-to-left SLC、Call-by-value Left-to-right SLC および Call-by-name SLC はこれの SubCalculus であり、同様に Progress と Preservation が成り立つ。

定理 A.1.4 (Progress (Call-by-value Right-to-left SLC)) 1. $\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}$ ならば、ある c', f', e' が存在して $\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle$ または $\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, e' \rangle$ である。

2. $\langle c \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}$ ならば、それは $\langle \bullet \,|\, v' \rangle$ という形であるか、ある c', f', e' が存在して $\langle c \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle$ である。

定理 A.1.5 (Preservation (Call-by-value Right-to-left SLC)) 1. $\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}$ であるとき、$\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle$ ならば $\langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle : +\mathsf{int}$ であり、$\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, e' \rangle$ ならば $\langle c' \,|\, e' \rangle : +\mathsf{int}$ である。

2. $\langle c \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}$ であるとき、$\langle c \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle$ ならば $\langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle : +\mathsf{int}$ である。

定理 A.1.6 (Progress (Call-by-value Left-to-Right SLC)) 1. $\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}$ ならば、ある c', f', e' が存在して $\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle$ または $\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, e' \rangle$ である。

2. $\langle c \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}$ ならば、それは $\langle \bullet \,|\, v' \rangle$ という形であるか、ある c', f', e' が存在して $\langle c \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle$ である。

定理 A.1.7 (Preservation (Call-by-value Left-to-Right SLC)) 1. $\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}$ であるとき、$\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle$ ならば $\langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle : +\mathsf{int}$ であり、$\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, e' \rangle$ ならば $\langle c' \,|\, e' \rangle : +\mathsf{int}$ である。

2. $\langle c \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}$ であるとき、$\langle c \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle$ ならば $\langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle : +\mathsf{int}$ である。

定理 A.1.8 (Progress (Call-by-name SLC)) 1. $\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}$ ならば、ある c', f', e' が存在して $\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle$ または $\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, e' \rangle$ である。

2. $\langle c \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}$ ならば、それは $\langle \bullet \,|\, v' \rangle$ という形であるか、ある c', f', e' が存在して $\langle c \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle$ である。

定理 A.1.9 (Preservation (Call-by-name SLC)) 1. $\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}$ であるとき、$\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle$ ならば $\langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle : +\mathsf{int}$ であり、$\langle c \,|\, f \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, e' \rangle$ ならば $\langle c' \,|\, e' \rangle : +\mathsf{int}$ である。

2. $\langle c \,|\, e \rangle : +\mathsf{int}$ であるとき、$\langle c \,|\, e \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle$ ならば $\langle c' \,|\, f' \,|\, e' \rangle : +\mathsf{int}$ である。

A.1.2　Call-by-value Right-to-left SLC の簡約の一意性

命題 A.1.10 Call-by-value Right-to-left SLC の簡約は型を持つならば一意的である。

証明

Call-by-value Right-to-left SLC の全ての c, f, e の組み合わせにおいて、型を持つならば一意に簡約できることを示す。

1. $\langle c \,|\, e \rangle$ の場合。
   (a) $c = k$ の場合。
      i. $k = y$ の場合。
         A. $e = v$ の場合。
            $v = x$ の場合。$\langle y \,|\, x \rangle$ は型エラーとなる。
            $v = \lceil f \rceil$ の場合。$\langle y \,|\, \lceil f \rceil \rangle$ は型エラーとなる。
            $v = n$ の場合。$\langle y \,|\, n \rangle$
            $v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle y \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v'] \rangle$ は型エラーとなる。
         B. $e = f \uparrow e'$ の場合。$\langle y \,|\, f \uparrow e' \rangle$ は型エラーとなる。
      ii. $k = \lfloor f \rfloor$ の場合。
         A. $e = v$ の場合。
            $v = x$　の場合。$\langle \lfloor f \rfloor \,|\, x \rangle$ は型エラーとなる。
            $v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle \lfloor f \rfloor \,|\, \lceil f' \rceil \rangle$ は型エラーとなる。
            $v = n$ の場合。$\langle \lfloor f \rfloor \,|\, n \rangle$ は型エラーとなる。
            $v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle \lfloor f \rfloor \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v'] \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, f \,|\, v' \rangle$ と簡約される。
         B. $e = f' \uparrow e'$ の場合。$\langle \lfloor f \rfloor \,|\, f' \uparrow e' \rangle \rightsquigarrow \langle \lfloor f \rfloor \,|\, f' \,|\, e' \rangle$ と簡約される。
      iii. $k = \bullet$ の場合。
         A. $e = v$ の場合。
            $v = x$　の場合。$\langle \bullet \,|\, x \rangle \rightsquigarrow x$ と簡約される。
            $v = \lceil f \rceil$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \lceil f \rceil \rangle \rightsquigarrow \lceil f \rceil$ と簡約される。
            $v = n$　の場合。$\langle \bullet \,|\, n \rangle \rightsquigarrow n$ と簡約される。
            $v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle \bullet \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v'] \rangle [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v']$ と簡約される。
         B. $e = f \uparrow e'$ の場合。$\langle \bullet \,|\, f \uparrow e' \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \,|\, f \,|\, e' \rangle$

iv. $k = [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v')]$　の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v')] \,|\, x \,\rangle$ は型エラーとなる。

$v = \lceil f \rceil$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v')] \,|\, \lceil f \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, f \,|\, v' \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v')] \,|\, n \,\rangle$ は型エラーとなる。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v'']$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v')] \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v''] \,\rangle$ は型エラーとなる。

B. $e = f \uparrow e'$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v')] \,|\, f \uparrow e' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v')] \,|\, f \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

(b) $c = c' \downarrow f$ の場合。

i. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, f \,|\, x \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, f \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, f \,|\, n \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, f \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v'] \,\rangle$ と簡約される。

ii. $e = f' \uparrow e'$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f \,|\, f' \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

2. $\langle\, c \,|\, f \,|\, e \,\rangle$ の場合。

(a) $c = k$ の場合。

i. $k = y$ の場合。

(f1) $f = x \Rightarrow e'$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x'$ の場合。$\langle\, y \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, x' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, y \,|\, e'[x'/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, y \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, y \,|\, e'[\lceil f' \rceil/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, y \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, y \,|\, e'[n/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle\, y \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, y \,|\, e'[[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v']/x] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, y \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, f' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, y \downarrow (x \Rightarrow e') \,|\, f' \uparrow e'' \,\rangle$ と簡約される。

(f2) $f = y' \Leftarrow c'$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, y \,|\, y' \Leftarrow c' \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[y/y'] \,|\, x \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, y \,|\, y' \Leftarrow c' \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[y/y'] \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, y \,|\, y' \Leftarrow c' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[y/y'] \,|\, n \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle\, y \,|\, y' \Leftarrow c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[y/y'] \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v'] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e'$ の場合。$\langle\, y \,|\, y' \Leftarrow c' \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, y \downarrow (y' \Leftarrow c') \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle$ と簡約される。

(f3) $f = \overline{e'}$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, y \,|\, \overline{e'} \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [y \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow x)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, y \,|\, \overline{e'} \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [y \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil f' \rceil)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, y \,|\, \overline{e'} \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [y \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow n)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle\, y \,|\, \overline{e'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v'] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow y)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, y \,|\, \overline{e'} \,|\, f' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, y \downarrow (\overline{e'}) \,|\, f' \uparrow e'' \,\rangle$ と簡約される。

(f4) $f = \underline{c'}$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, y \,|\, \underline{c'} \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow y \downarrow f_y) \uparrow x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, y \,|\, \underline{c'} \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow y \downarrow f_y) \uparrow \lceil f' \rceil] \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, y \,|\, \underline{c'} \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow y \downarrow f_y) \uparrow n] \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle\, y \,|\, \underline{c'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow y \downarrow f_y) \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v']] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e'$ の場合。$\langle\, y \,|\, \underline{c'} \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, y \downarrow (\underline{c'}) \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle$ と簡約される。

ii. $k = \lfloor f' \rfloor$ の場合。

(f1) $f = x \Rightarrow e'$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x'$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, x' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, e'[x'/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, e'[\lceil f'' \rceil/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, e'[n/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, e'[[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v']/x] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f'' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, f'' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, \lfloor f' \rfloor \downarrow (x \Rightarrow e') \,|\, f'' \uparrow e'' \,\rangle$ と簡約される。

(f2) $f = y \Leftarrow c'$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[\lfloor f' \rfloor / y] \,|\, x \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[\lfloor f' \rfloor / y] \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[\lfloor f' \rfloor / y] \,|\, n \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[\lfloor f' \rfloor / y] \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v'] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f'' \uparrow e'$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, \lfloor f' \rfloor \downarrow (y \Leftarrow c') \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle$ と簡約される。

(f3) $f = \overline{e'}$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, \overline{e'} \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [\lfloor f' \rfloor \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow x)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, \overline{e'} \,|\, \lfloor f'' \rfloor \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [\lfloor f' \rfloor \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lfloor f'' \rfloor)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, \overline{e'} \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [\lfloor f' \rfloor \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow n)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, \overline{e'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [\lfloor f' \rfloor \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v'])] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f'' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, \overline{e'} \,|\, f'' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, \lfloor f' \rfloor \downarrow \overline{e'} \,|\, f'' \uparrow e'' \,\rangle$ と簡約される。

(f4) $f = \underline{c'}$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, \underline{c'} \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \lfloor f' \rfloor \downarrow f_y) \uparrow x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, \underline{c'} \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \lfloor f' \rfloor \downarrow f_y) \uparrow \lceil f'' \rceil] \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, \underline{c'} \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \lfloor f' \rfloor \downarrow f_y) \uparrow n] \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, \underline{c'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \lfloor f' \rfloor \downarrow f_y) \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v']] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f'' \uparrow e'$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, \underline{c'} \,|\, f'' \uparrow e' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, \lfloor f' \rfloor \downarrow \underline{c'} \,|\, f'' \uparrow e' \,\rangle$ と簡約される。

iii. $k = \bullet$ の場合。

(f1) $f = x \Rightarrow e'$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x'$ の場合。$\langle\, \bullet \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, x' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, \bullet \,|\, e'[x'/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle \bullet \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, \lceil f' \rceil \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \,|\, e'[\lceil f' \rceil/x] \rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle \bullet \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, n \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \,|\, e'[n/x] \rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle \bullet \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v'] \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \,|\, e'[[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v']/x] \rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e''$ の場合。$\langle \bullet \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, f' \uparrow e'' \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \downarrow (x \Rightarrow e') \,|\, f' \uparrow e'' \rangle$ と簡約される。

(f2) $f = y \Leftarrow c'$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle \bullet \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, x \rangle \rightsquigarrow \langle c'[\bullet/y] \,|\, x \rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle \bullet \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, \lceil f' \rceil \rangle \rightsquigarrow \langle c'[\bullet/y] \,|\, \lceil f' \rceil \rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle \bullet \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, n \rangle \rightsquigarrow \langle c'[\bullet/y] \,|\, n \rangle$

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle \bullet \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v'] \rangle \rightsquigarrow \langle c'[\bullet/y] \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v'] \rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e'$ の場合。$\langle \bullet \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, f' \uparrow e' \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \downarrow (y \Leftarrow c') \,|\, f' \uparrow e' \rangle$ と簡約される。

(f3) $f = \overline{e'}$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \overline{e'} \,|\, x \rangle \rightsquigarrow \langle [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow x)] \,|\, e' \rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \overline{e'} \,|\, \lceil f' \rceil \rangle \rightsquigarrow \langle [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil f' \rceil)] \,|\, e' \rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \overline{e'} \,|\, n \rangle \rightsquigarrow \langle [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow n)] \,|\, e' \rangle$

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \overline{e'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v'] \rangle \rightsquigarrow \langle [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v'])] \,|\, e' \rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e''$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \overline{e'} \,|\, f' \uparrow e'' \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \downarrow \overline{e'} \,|\, f' \uparrow e'' \rangle$ と簡約される。

(f4) $f = \underline{c'}$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \underline{c'} \,|\, x \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \bullet \downarrow f_y) \uparrow x] \rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \underline{c'} \,|\, \lceil f' \rceil \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \bullet \downarrow f_y) \uparrow \lceil f' \rceil] \rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \underline{c'} \,|\, n \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \bullet \downarrow f_y) \uparrow n] \rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \underline{c'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v'] \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \bullet \downarrow f_y) \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v']] \rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e'$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \underline{c'} \,|\, f' \uparrow e' \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \downarrow \underline{c'} \,|\, f' \uparrow e' \rangle$ と簡約される。

iv. $k = [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)]$

(f1) $f = x \Rightarrow e'$ の場合。

A. $e = v'$ の場合。

$v' = x'$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow ([f_x] \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, x' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [c' \downarrow ([f_x] \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, e'[x'/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v' = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, e'[\lceil f' \rceil/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v' = n$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, e'[n/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v' = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v'']$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v''] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, e'[[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v'']/x] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, f' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \downarrow (x \Rightarrow e') \,|\, f' \uparrow e'' \,\rangle$ と簡約される。

(f2) $f = y \Leftarrow c''$ の場合。

A. $e = v'$ の場合。

$v' = x$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c''[[c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)]/y] \,|\, x \,\rangle$ と簡約される。

$v' = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c''[[c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)]/y] \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle$ と簡約される。

$v' = n$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c''[[c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)]/y] \,|\, n \,\rangle$ と簡約される。

$v' = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow v''']$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow v'''] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c''[[c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)]/y] \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow v'''] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e'$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \downarrow (y \Leftarrow c'') \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle$ と簡約される。

(f3) $f = \overline{e'}$ の場合。

A. $e = v'$ の場合。

$v' = x$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, \overline{e'} \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [[c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow x)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v' = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, \overline{e'} \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [[c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil f' \rceil)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, \overline{e'} \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [[c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow n)] \,|\, e' \,\rangle$

$v' = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v'']$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, \overline{e'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v''] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [[c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v''])] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow ([\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, \overline{e'} \,|\, f' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [c' \downarrow ([\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \downarrow \overline{e'} \,|\, f' \uparrow e'' \,\rangle$ と簡約される。

(f4) $f = \underline{c''}$ の場合。

A. $e = v'$ の場合。

$v' = x$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow ([\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, \underline{c''} \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow [c' \downarrow ([\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \downarrow f_y) \uparrow x] \,\rangle$ と簡約される。

$v' = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow ([\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, \underline{c''} \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow [c' \downarrow ([\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \downarrow f_y) \uparrow \lceil f' \rceil] \,\rangle$ と簡約される。

$v' = n$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow ([\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, \underline{c''} \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow [c' \downarrow ([\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \downarrow f_y) \uparrow n] \,\rangle$ と簡約される。

$v' = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow v'']$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow ([\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, \underline{c''} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow v''] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow [c' \downarrow ([\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \downarrow f_y) \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow v'']] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e'$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow ([\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, \underline{c''} \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [c' \downarrow ([\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \downarrow \underline{c''} \,|\, f' \downarrow e' \,\rangle$ と簡約される。

(b) $c = c' \downarrow f'$ の場合。

(f1) $f = x \Rightarrow e'$ の場合。

i. $e = v$ の場合。

$v = x'$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, x' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, e'[x'/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, e'[\lceil f'' \rceil/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, e'[n/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, x \Rightarrow e \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, e'[[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v']/x] \,\rangle$ と簡約される。

ii. $e = f'' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, x \Rightarrow e \,|\, f'' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, (c' \downarrow f') \downarrow (x \Rightarrow e) \,|\, f'' \uparrow e'' \,\rangle$ と簡約される。

(f2) $f = y \Leftarrow c''$ の場合。

i. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c''[c' \downarrow f'/y] \,|\, x \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c''[c' \downarrow f'/y] \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c''[c' \downarrow f'/y] \,|\, n \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow v'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c''[c' \downarrow f'/y] \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow v'] \,\rangle$ と簡約される。

ii. $e = f'' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, f'' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, (c' \downarrow f') \downarrow (y \Leftarrow c'') \,|\, f'' \uparrow e'' \,\rangle$ と簡約される。

(f3) $f = \overline{e'}$ の場合。

i. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \overline{e'} \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [(c' \downarrow f') \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow x)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \overline{e'} \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [(c' \downarrow f') \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil f'' \rceil)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \overline{e'} \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [(c' \downarrow f') \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow n)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \overline{e'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [(c' \downarrow f') \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v'])] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

ii. $e = f'' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \overline{e'} \,|\, f'' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, (c' \downarrow f') \downarrow \overline{e'} \,|\, f'' \uparrow e'' \,\rangle$ と簡約される。

(f4) $f = \underline{c''}$ の場合。

i. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \underline{c''} \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow (c' \downarrow f') \downarrow f_y) \uparrow x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \underline{c''} \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow (c' \downarrow f') \downarrow f_y) \uparrow \lceil f'' \rceil] \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \underline{c''} \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow (c' \downarrow f') \downarrow f_y) \uparrow n] \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \underline{c''} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow v'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow (c' \downarrow f') \downarrow f_y) \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow v']] \,\rangle$ と簡約される。

ii. $e = f'' \uparrow e'$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \underline{c''} \,|\, f'' \uparrow e' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, (c' \downarrow f') \downarrow \underline{c''} \,|\, f'' \uparrow e' \,\rangle$ と簡約される。

以上より命題は成り立つ。 $\square$

A.1.3 Right-to-left Λ_C 計算から Call-by-value Right-to-left SLC への変換についての定理と補題

補題 A.1.11 $\langle \bullet \,|\, T_e[\![E[M]]\!] \rangle \approx \langle T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \rangle$

証明

E の構造に関する帰納法より証明する。

(1) $E = [\,]$ の場合。$\langle \bullet \,|\, T_e[\![M]\!] \rangle = \langle T_c[\![[\,]]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \rangle$ となり、命題を満たす。

(2) $E = E'[F], E' = [\,], F = M'\ [\,]$ の場合。$\langle \bullet \,|\, T_e[\![E'[M'\ [M]]]\!] \rangle$ は帰納法の仮定より $\langle \bullet \,|\, T_e[\![E'[M'\ [M]]]\!] \rangle \approx \langle T_c[\![E']\!] \,|\, T_e[\![M'\ [M]]\!] \rangle$ が成り立つ。さらにこれは

$$\begin{array}{rcl}
\langle T_c[\![E']\!] \,|\, T_e[\![M'\ [M]]\!] \rangle & = & \langle T_c[\![E']\!] \,|\, T_f[\![M']\!] \uparrow T_e[\![M]\!] \rangle \\
& \rightsquigarrow & \langle T_c[\![E']\!] \,|\, T_f[\![M']\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \rangle \\
& \approx & \langle T_c[\![E']\!] \downarrow T_f[\![M']\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \rangle \\
& = & \langle T_c[\![E']\!] \downarrow T_F[\![M'\ [\,]]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \rangle \\
& = & \langle T_c[\![E'[M'\ [\,]]]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \rangle
\end{array}$$

となり、命題を満たす。

(3) $E = E'[F], E' = [\,], F = [\,]\ V$ の場合。$\langle \bullet \,|\, T_e[\![E'[[M]\ V]]\!] \rangle$ は帰納法の仮定より $\langle \bullet \,|\, T_e[\![E'[[M]\ V]]\!] \rangle \approx \langle T_c[\![E']\!] \,|\, T_e[\![[M]\ V]\!] \rangle$ が成り立つ。さらにこれは

$$\begin{array}{rcl}
\langle T_c[\![E']\!] \,|\, T_e[\![[M]\ V]\!] \rangle & = & \langle T_c[\![E']\!] \,|\, T_f[\![M]\!] \uparrow T_e[\![V]\!] \rangle \\
& \rightsquigarrow & \langle T_c[\![E']\!] \,|\, T_f[\![M]\!] \,|\, T_e[\![V]\!] \rangle \\
& = & \langle T_c[\![E']\!] \,|\, \overline{T_e[\![M]\!]} \,|\, T_e[\![V]\!] \rangle \ (M \text{ は} \lambda x.\,M, \mathcal{C} \text{のみ}) \\
& \rightsquigarrow & \langle [T_c[\![E']\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![V]\!])] \,|\, T_e[\![M]\!] \rangle \\
& = & \langle [T_c[\![E']\!] \downarrow T_F[\![[\,]\ V]\!]] \,|\, T_e[\![M]\!] \rangle \\
& = & \langle T_c[\![E'[[\,]\ V]]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \rangle
\end{array}$$

となり命題を満たす。

以上 (1)〜(3) より、命題は成り立つ。 □

定理 A.1.12 Right-to-left Λ_C 計算の式 M について $M \rightsquigarrow N$ が成り立ち、かつ $\vdash T[\![M]\!] : +\mathsf{int}$ なら、$T[\![M]\!] \approx T[\![N]\!]$ が成り立つ。

証明

(1) $E[(\lambda x.\,M)\,V] \rightsquigarrow E[M[V/x]]$ の場合。補題 A.1.11 から

$$\begin{array}{rcl} T[\![E[(\lambda x.\,M)\,V]]\!] & \approx & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![(\lambda x.\,M)\,V]\!] \,\rangle \\ & = & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_f[\![\lambda x.\,M]\!] \uparrow T_e[\![V]\!] \,\rangle \\ & = & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, (x \Rightarrow T_e[\![M]\!]) \uparrow T_e[\![V]\!] \,\rangle \\ & \rightsquigarrow & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, x \Rightarrow T_e[\![M]\!] \,|\, T_e[\![V]\!] \,\rangle \\ & \rightsquigarrow & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![M]\!][T_e[\![V]\!]/x] \,\rangle\ (T_e[\![V]\!] \text{ は値より}) \end{array}$$

$$T[\![E[M[V/x]]]\!] \approx \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![M[V/x]]\!] \,\rangle$$

Call-by-value Right-to-left SLC の代入補題 A.1.13 より

$$\langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![M]\!][T_e[\![V]\!]/x] \,\rangle = \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![M[V/x]]\!] \,\rangle$$

が成り立ち、命題を満たす。

(2) $E[\mathcal{C}\,V] \rightsquigarrow V\,(\lambda x.\,\mathcal{A}\,(E[x])) = V\,(\lambda x.\,(\mathcal{C}\,(\lambda\_.\,E[x])))$ の場合。補題 A.1.11 から

$$\begin{array}{rl} & T[\![E[\mathcal{C}\,V]]\!] \\ \approx & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![\mathcal{C}\,V]\!] \,\rangle \\ = & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_f[\![\mathcal{C}]\!] \uparrow T_e[\![V]\!] \,\rangle \\ = & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow T_e[\![V]\!] \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)] \,|\, T_e[\![V]\!] \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow (\lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil))] \,|\, T_e[\![V]\!] \,\rangle \\ = & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow (\lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil))] \,|\, \lceil T_f[\![V]\!] \rceil \,\rangle\ (V \text{ は} \lambda x.\,M, \mathcal{C} \text{のみ}) \\ \rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, T_f[\![V]\!] \,|\, \lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil \,\rangle \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & T[\![V\,(\lambda x.\,(\mathcal{C}\,(\lambda\_.\,E[x])))]\!] \\ \approx & \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![V\,(\lambda x.\,\mathcal{A}\,(E[x]))]\!] \,\rangle \\ = & \langle\, \bullet \,|\, T_f[\![V]\!]\,(\lambda x.\,(\mathcal{C}\,(\lambda\_.\,E[x]))) \,\rangle \\ = & \langle\, \bullet \,|\, T_f[\![V]\!] \uparrow T_e[\![\lambda x.\,(\mathcal{C}\,(\lambda\_.\,E[x]))]\!] \,\rangle \\ = & \langle\, \bullet \,|\, T_f[\![V]\!] \uparrow (\lceil x \Rightarrow T_e[\![(\mathcal{C}\,(\lambda\_.\,E[x]))]\!] \rceil) \,\rangle \\ = & \langle\, \bullet \,|\, T_f[\![V]\!] \uparrow (\lceil x \Rightarrow (T_f[\![\mathcal{C}]\!] \uparrow T_e[\![\lambda\_.\,E[x]]\!]) \rceil) \,\rangle \\ = & \langle\, \bullet \,|\, T_f[\![V]\!] \uparrow (\lceil x \Rightarrow ((y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow (\lceil \_ \Rightarrow T_e[\![E[x]]\!] \rceil)) \rceil) \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, T_f[\![V]\!] \,|\, \lceil x \Rightarrow ((y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow (\lceil \_ \Rightarrow T_e[\![E[x]]\!] \rceil)) \rceil \,\rangle \end{array}$$

Call-by-value Right-to-left SLC の論理関係の基本定理 A.2.2 より $\langle\, \bullet \,|\, T_f[\![V]\!] \,|\, \lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil \,\rangle$ と $\langle\, \bullet \,|\, T_f[\![V]\!] \,|\, \lceil x \Rightarrow ((y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow (\lceil \_ \Rightarrow T_e[\![E[x]]\!] \rceil)) \rceil \,\rangle$ の項部分は同等な式である (同じ値に落ちる) ことが言え、命題を満たす。この証明は後ほど参照されたい。

以上 (1)〜(2) より、命題は成り立つ。 □

補題 A.1.13 (Call-by-value Right-to-left SLC の代入補題) $T_e[\![M]\!][T_e[\![V]\!]/x] = T_e[\![M[V/x]]\!]$

証明

M の構造に関する帰納法より証明する。

(1) $M = M'\,N'$ のとき。$T_e[\![M'\,N']\!][T_e[\![V]\!]/x] = T_e[\![(M'\,N')[V/x]]\!]$ を示す。

$$\begin{array}{rcl} 左辺 &=& (T_f[\![M']\!] \uparrow T_e[\![N']\!])[T_e[\![V]\!]/x] \\ &=& (T_f[\![M']\!][T_e[\![V]\!]/x]) \uparrow (T_e[\![N']\!][T_e[\![V]\!]/x]) \\ &=& T_f[\![M'[V/x]]\!] \uparrow T_e[\![N'[V/x]]\!] \text{ (帰納法の仮定より)} \\ &=& T_e[\![(M'[V/x])\,(N'[V/x])]\!] \\ &=& T_e[\![(M'\,N')[V/x]]\!] \end{array}$$

となり、命題を満たす。

(2) $M = V'$ の場合。

(i) $V' = x'$ の場合。$T_e[\![x']\!][T_e[\![V]\!]/x] = T_e[\![x'[V/x]]\!]$ を (i')(i") に示す。

(i') $x' = x$ の場合。左辺は $x' = x$ なので、x' が $T_e[\![V]\!]$ に置き換わり、左辺 $= x'[T_e[\![V]\!]/x] = T_e[\![V]\!]$ となる。一方右辺は、右辺 $= T_e[\![V]\!] =$ 左辺 となるので、命題を満たす。

(i") $x' \neq x$ の場合。左辺は $x' \neq x$ なので、代入は行われず、左辺 $= x'[T_e[\![V]\!]/x] = x'$ となる。一方右辺も 右辺 $= T_e[\![x'[V/x]]\!] = T_e[\![x']\!] = x' =$ 左辺 となり、命題を満たす。

(ii) $V' = \lambda x'.\,M$ の場合。$T_e[\![\lambda x'.\,M]\!][T_e[\![V]\!]/x] = T_e[\![(\lambda x'.\,M)[V/x]]\!]$ を (ii')(ii") に示す。$T_e[\![M]\!][T_e[\![V]\!]/x] = T_e[\![M[V/x]]\!]$ を仮定する。

(ii') $x' = x$ の場合。左辺 $= \lceil x' \Rightarrow T_e[\![M]\!]\rceil[T_e[\![V]\!]/x] = \lceil x' \Rightarrow T_e[\![M]\!]\rceil$ となる。一方 右辺 $= T_e[\![\lambda x'.\,M]\!] = \lceil x' \Rightarrow T_e[\![M]\!]\rceil =$ 左辺 となり、命題を満たす。

(ii") $x' \neq x$ の場合。

$$\begin{array}{rcl} 左辺 &=& \lceil x' \Rightarrow T_e[\![M]\!]\rceil[T_e[\![V]\!]/x] \\ &=& \lceil x' \Rightarrow T_e[\![M[T_e[\![V]\!]/x]]\!]\rceil \\ &=& \lceil x' \Rightarrow T_e[\![M[V/x]]\!]\rceil \text{ (帰納法の仮定より)} \end{array}$$

一方右辺は 右辺 $= T_e[\![\lambda x'.\,M[V/x]]\!] = \lceil x' \Rightarrow T_e[\![M[V/x]]\!]\rceil =$ 左辺 となり、命題を満たす。

(iii) $V' = \mathcal{C}$ の場合。$T_e[\![\mathcal{C}]\!][T_e[\![V]\!]/x] = T_e[\![\mathcal{C}[V/x]]\!]$ を示す。

$$\begin{array}{rcl} 左辺 &=& \lceil y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x\rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y\rceil)]\rceil[T_e[\![V]\!]/x] \\ &=& y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x\rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y\rceil)] \end{array}$$

となる。一方右辺は 右辺 $= y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x\rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y\rceil)] =$ 左辺 となり、命題を満たす。

(i)〜(iii) より、命題は成り立つ。

(1)(2) より命題は成り立つ。 □

以上より、SLC に Call-by-value Right-to-left Λ_C 計算を埋め込むことができる。

A.1.4 Call-by-value Left-to-right SLC の簡約の一意性

命題 A.1.14 Call-by-value Left-to-right SLC の簡約は型を持つならば一意的である。

証明

Call-by-value Left-to-right SLC の全ての c, f, e の組み合わせにおいて、型を持つならば一意に簡約できることを示す。

1. $\langle c \,|\, e \rangle$ の場合。
    (a) $c = k$ の場合。
        i. $k = y$ の場合。
            A. $e = v$ の場合。
                $v = x$ の場合。$\langle y \,|\, x \rangle$ は型エラーとなる。
                $v = \lceil f \rceil$ の場合。$\langle y \,|\, \lceil f \rceil \rangle$ は型エラーとなる。
                $v = n$ の場合。$\langle y \,|\, n \rangle$
                $v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e']$ の場合。$\langle y \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e'] \rangle$ は型エラーとなる。
            B. $e = f \uparrow e'$ の場合。$\langle y \,|\, f \uparrow e' \rangle$ は型エラーとなる。
        ii. $k = \lfloor f \rfloor$ の場合。
            A. $e = v$ の場合。
                $v = x$ 　の場合。$\langle \lfloor f \rfloor \,|\, x \rangle$ は型エラーとなる。
                $v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle \lfloor f \rfloor \,|\, \lceil f' \rceil \rangle$ は型エラーとなる。
                $v = n$ の場合。$\langle \lfloor f \rfloor \,|\, n \rangle$ は型エラーとなる。
                $v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e']$ の場合。$\langle \lfloor f \rfloor \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e'] \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, f \,|\, e' \rangle$ と簡約される。
            B. $e = f' \uparrow e'$ の場合。$\langle \lfloor f \rfloor \,|\, f' \uparrow e' \rangle \rightsquigarrow \langle \lfloor f \rfloor \,|\, f' \,|\, e' \rangle$ と簡約される。
        iii. $k = \bullet$ の場合。
            A. $e = v$ の場合。
                $v = x$ 　の場合。$\langle \bullet \,|\, x \rangle \rightsquigarrow x$ と簡約される。
                $v = \lceil f \rceil$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \lceil f \rceil \rangle \rightsquigarrow \lceil f \rceil$ と簡約される。
                $v = n$ 　の場合。$\langle \bullet \,|\, n \rangle \rightsquigarrow n$ と簡約される。
                $v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle \bullet \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow ve] \rangle [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e']$ と簡約される。
            B. $e = f \uparrow e'$ の場合。$\langle \bullet \,|\, f \uparrow e' \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \,|\, f \,|\, e' \rangle$

iv. $k = [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v')]$　の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, x \,\rangle$ は型エラーとなる。

$v = \lceil f \rceil$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \lceil f \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, f \,|\, v' \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, n \,\rangle$ は型エラーとなる。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e'']$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e''] \,\rangle$ は型エラーとなる。

B. $e = f \uparrow e''$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, f \uparrow e' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, f \,|\, e'' \,\rangle$ と簡約される。

(b) $c = c' \downarrow f$ の場合。

i. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, f \,|\, x \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, f \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, f \,|\, n \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e']$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, f \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e'] \,\rangle$ と簡約される。

ii. $e = f' \uparrow e'$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f \,|\, f' \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

2. $\langle\, c \,|\, f \,|\, e \,\rangle$ の場合。

(a) $c = k$ の場合。

i. $k = y$ の場合。

(f1) $f = x \Rightarrow e'$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x'$ の場合。$\langle\, y \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, x' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, y \,|\, e'[x'/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, y \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, y \,|\, e'[\lceil f' \rceil/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, y \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, y \,|\, e'[n/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e'']$ の場合。$\langle\, y \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e''] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, y \,|\, e'[[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e'']/x] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, y \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, f' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, y \downarrow (x \Rightarrow e') \,|\, f' \uparrow e'' \,\rangle$ と簡約される。

(f2) $f = y' \Leftarrow c'$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, y \,|\, y' \Leftarrow c' \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[y/y'] \,|\, x \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, y \,|\, y' \Leftarrow c' \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[y/y'] \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, y \,|\, y' \Leftarrow c' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[y/y'] \,|\, n \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e']$ の場合。$\langle\, y \,|\, y' \Leftarrow c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[y/y'] \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e'] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e'$ の場合。$\langle\, y \,|\, y' \Leftarrow c' \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, y \downarrow (y' \Leftarrow c') \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle$ と簡約される。

(f3) $f = \overline{e'}$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, y \,|\, \overline{e'} \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [y \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow x)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, y \,|\, \overline{e'} \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [y \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil f' \rceil)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, y \,|\, \overline{e'} \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [y \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow n)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e'']$ の場合。$\langle\, y \,|\, \overline{e'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e''] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e''] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow y)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, y \,|\, \overline{e'} \,|\, f' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [y \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow (f' \uparrow e''))] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

(f4) $f = \underline{c'}$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, y \,|\, \underline{c'} \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow y \downarrow f_y) \uparrow x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, y \,|\, \underline{c'} \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow y \downarrow f_y) \uparrow \lceil f' \rceil] \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, y \,|\, \underline{c'} \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow y \downarrow f_y) \uparrow n] \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e']$ の場合。$\langle\, y \,|\, \underline{c'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow y \downarrow f_y) \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e']] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e'$ の場合。$\langle\, y \,|\, \underline{c'} \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow y \downarrow f_y) \uparrow (f' \uparrow e')] \,\rangle$ と簡約される。

ii. $k = \lfloor f' \rfloor$ の場合。

(f1) $f = x \Rightarrow e'$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x'$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, x' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, e'[x'/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, e'[\lceil f'' \rceil/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, e'[n/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e'']$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e''] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, e'[[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e'']/x] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f'' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, f'' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, \lfloor f' \rfloor \downarrow (x \Rightarrow e') \,|\, f'' \uparrow e'' \,\rangle$ と簡約される。

(f2) $f = y \Leftarrow c'$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, x \,\rangle \leadsto \langle\, c'[\lfloor f' \rfloor/y] \,|\, x \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle \leadsto \langle\, c'[\lfloor f' \rfloor/y] \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, n \,\rangle \leadsto \langle\, c'[\lfloor f' \rfloor/y] \,|\, n \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e']$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e'] \,\rangle \leadsto \langle\, c'[\lfloor f' \rfloor/y] \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e'] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f'' \uparrow e'$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle \leadsto \langle\, \lfloor f' \rfloor \downarrow (y \Leftarrow c') \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle$ と簡約される。

(f3) $f = \overline{e'}$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, \overline{e'} \,|\, x \,\rangle \leadsto \langle\, [\lfloor f' \rfloor \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow x)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, \overline{e'} \,|\, \lfloor f'' \rfloor \,\rangle \leadsto \langle\, [\lfloor f' \rfloor \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lfloor f'' \rfloor)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, \overline{e'} \,|\, n \,\rangle \leadsto \langle\, [\lfloor f' \rfloor \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow n)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e'']$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, \overline{e'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e''] \,\rangle \leadsto \langle\, [\lfloor f' \rfloor \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e''])] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f'' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, \overline{e'} \,|\, f'' \uparrow e'' \,\rangle \leadsto \langle\, [\lfloor f' \rfloor \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow (f'' \uparrow e''))] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

(f4) $f = \underline{c'}$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, \underline{c'} \,|\, x \,\rangle \leadsto \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \lfloor f' \rfloor \downarrow f_y) \uparrow x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, \underline{c'} \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle \leadsto \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \lfloor f' \rfloor \downarrow f_y) \uparrow \lceil f'' \rceil] \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, \underline{c'} \,|\, n \,\rangle \leadsto \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \lfloor f' \rfloor \downarrow f_y) \uparrow n] \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e']$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, \underline{c'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e'] \,\rangle \leadsto \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \lfloor f' \rfloor \downarrow f_y) \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e']] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f'' \uparrow e'$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, \underline{c'} \,|\, f'' \uparrow e' \,\rangle \leadsto \langle\, [\lfloor f' \rfloor \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow (f'' \uparrow e'))] \,|\, c' \,\rangle$ と簡約される。

iii. $k = \bullet$ の場合。

(f1) $f = x \Rightarrow e'$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x'$ の場合。$\langle \bullet \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, x' \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \,|\, e'[x'/x] \rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle \bullet \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, \lceil f' \rceil \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \,|\, e'[\lceil f' \rceil/x] \rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle \bullet \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, n \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \,|\, e'[n/x] \rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e'']$ の場合。$\langle \bullet \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e''] \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \,|\, e'[[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e'']/x] \rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e''$ の場合。$\langle \bullet \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, f' \uparrow e'' \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \downarrow (x \Rightarrow e') \,|\, f' \uparrow e'' \rangle$ と簡約される。

(f2) $f = y \Leftarrow c'$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle \bullet \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, x \rangle \rightsquigarrow \langle c'[\bullet/y] \,|\, x \rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle \bullet \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, \lceil f' \rceil \rangle \rightsquigarrow \langle c'[\bullet/y] \,|\, \lceil f' \rceil \rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle \bullet \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, n \rangle \rightsquigarrow \langle c'[\bullet/y] \,|\, n \rangle$

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e'']$ の場合。$\langle \bullet \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e''] \rangle \rightsquigarrow \langle c'[\bullet/y] \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e''] \rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e'$ の場合。$\langle \bullet \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, f' \uparrow e' \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \downarrow (y \Leftarrow c') \,|\, f' \uparrow e' \rangle$ と簡約される。

(f3) $f = \overline{e'}$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \overline{e'} \,|\, x \rangle \rightsquigarrow \langle [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow x)] \,|\, e' \rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \overline{e'} \,|\, \lceil f' \rceil \rangle \rightsquigarrow \langle [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil f' \rceil)] \,|\, e' \rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \overline{e'} \,|\, n \rangle \rightsquigarrow \langle [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow n)] \,|\, e' \rangle$

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e'']$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \overline{e'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e''] \rangle \rightsquigarrow \langle [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e''])] \,|\, e' \rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e''$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \overline{e'} \,|\, f' \uparrow e'' \rangle \rightsquigarrow \langle [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow (f' \uparrow e''))] \,|\, e' \rangle$ と簡約される。

(f4) $f = \underline{c'}$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \underline{c'} \,|\, x \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \bullet \downarrow f_y) \uparrow x] \rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \underline{c'} \,|\, \lceil f' \rceil \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \bullet \downarrow f_y) \uparrow \lceil f' \rceil] \rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \underline{c'} \,|\, n \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \bullet \downarrow f_y) \uparrow n] \rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e']$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \underline{c'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e'] \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \bullet \downarrow f_y) \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e']] \rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e'$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \underline{c'} \,|\, f' \uparrow e' \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \bullet \downarrow f_y) \uparrow (f' \uparrow e')] \rangle$ と簡約される。

iv. $k = [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')]$

(f1) $f = x \Rightarrow e''$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x'$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, x \Rightarrow e'' \,|\, x' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, e''[x'/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, x \Rightarrow e'' \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, e''[\lceil f' \rceil/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, x \Rightarrow e'' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, e''[n/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e''']$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, x \Rightarrow e'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e'''] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, e''[[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e''']/x] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e'''$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, x \Rightarrow e'' \,|\, f' \uparrow e''' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow (x \Rightarrow e'') \,|\, f' \uparrow e''' \,\rangle$ と簡約される。

(f2) $f = y \Leftarrow c''$ の場合。

A. $e = v'$ の場合。

$v' = x$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c''[[c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')]/y] \,|\, x \,\rangle$ と簡約される。

$v' = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c''[[c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')]/y] \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle$ と簡約される。

$v' = n$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c''[[c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')]/y] \,|\, n \,\rangle$ と簡約される。

$v' = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow v''']$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow v'''] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c''[[c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')]/y] \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow v'''] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, f' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow (y \Leftarrow c'') \,|\, f' \uparrow e'' \,\rangle$ と簡約される。

(f3) $f = \overline{e''}$ の場合。

A. $e = v'$ の場合。

$v' = x$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \overline{e''} \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [[c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow x)] \,|\, e'' \,\rangle$ と簡約される。

$v' = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \overline{e''} \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [[c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil f' \rceil)] \,|\, e'' \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \overline{e'} \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [[c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow n)] \,|\, e'' \,\rangle$

$v' = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e''']$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \overline{e''} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e'''] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [[c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e'''])] \,|\, e'' \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \,|\, \overline{e'} \,|\, f' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [[c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow (f' \uparrow e''))] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

(f4) $f = \underline{c''}$ の場合。

A. $e = v'$ の場合。

$v' = x$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \underline{c''} \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow f_y) \uparrow x] \,\rangle$ と簡約される。

$v' = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \underline{c''} \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow f_y) \uparrow \lceil f' \rceil] \,\rangle$ と簡約される。

$v' = n$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \underline{c''} \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow f_y) \uparrow n] \,\rangle$ と簡約される。

$v' = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow e'']$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \underline{c''} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow e''] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow f_y) \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow e'']] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \underline{c''} \,|\, f' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow [c' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow f_y) \uparrow (f' \uparrow e'')] \,\rangle$ と簡約される。

(b) $c = c' \downarrow f'$ の場合。

(f1) $f = x \Rightarrow e'$ の場合。

i. $e = v$ の場合。

$v = x'$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, x' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, e'[x'/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, e'[\lceil f'' \rceil/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, e'[n/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e'']$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e''] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, e'[[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e'']/x] \,\rangle$ と簡約される。

ii. $e = f'' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, f'' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, (c' \downarrow f') \downarrow (x \Rightarrow e') \,|\, f'' \uparrow e'' \,\rangle$ と簡約される。

(f2) $f = y \Leftarrow c''$ の場合。

i. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c''[c' \downarrow f'/y] \,|\, x \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c''[c' \downarrow f'/y] \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c''[c' \downarrow f'/y] \,|\, n \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow e']$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow e'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c''[c' \downarrow f'/y] \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow e'] \,\rangle$ と簡約される。

ii. $e = f'' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, f'' \uparrow e'' \rangle \rightsquigarrow \langle\, (c' \downarrow f') \downarrow (y \Leftarrow c'') \,|\, f'' \uparrow e'' \,\rangle$ と簡約される。

(f3) $f = \overline{e'}$ の場合。

i. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \overline{e'} \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [(c' \downarrow f') \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow x)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \overline{e'} \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [(c' \downarrow f') \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil f'' \rceil)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \overline{e'} \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [(c' \downarrow f') \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow n)] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e'']$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \overline{e'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e''] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [(c' \downarrow f') \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow e''])] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

ii. $e = f'' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \overline{e'} \,|\, f'' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [(c' \downarrow f') \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow (f'' \uparrow e''))] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

(f4) $f = \underline{c''}$ の場合。

i. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \underline{c''} \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow (c' \downarrow f') \downarrow f_y) \uparrow x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \underline{c''} \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow (c' \downarrow f') \downarrow f_y) \uparrow \lceil f'' \rceil] \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \underline{c''} \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow (c' \downarrow f') \downarrow f_y) \uparrow n] \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow e']$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \underline{c''} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow v'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow (c' \downarrow f') \downarrow f_y) \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c''' \downarrow f_y) \uparrow e']] \,\rangle$ と簡約される。

ii. $e = f'' \uparrow e'$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \underline{c''} \,|\, f'' \uparrow e' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow (c' \downarrow f') \downarrow f_y) \uparrow (f'' \uparrow e')] \,\rangle$ と簡約される。

以上より命題は成り立つ。 □

A.1.5 Left-to-Right Λ_C 計算から Call-by-value Left-to-right SLC への変換についての定理と補題

補題 A.1.15 $\langle \bullet \,|\, T_e[\![E[M]]\!] \,\rangle \approx \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \,\rangle$

証明

E の構造に関する帰納法より証明する。

(1) $E = [\,]$ の場合。$\langle \bullet \,|\, T_e[\![M]\!] \,\rangle = \langle\, T_c[\![[\,]]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \,\rangle$
となり、命題を満たす。

(2) $E = E'[F], E' = [\,], F = V\ [\,]$ の場合。$\langle \bullet \,|\, T_e[\![E'[V\ [M]]]\!] \,\rangle$ は帰納法の仮定より $\langle\, T_c[\![E']\!] \,|\, T_e[\![V\ [M]]\!] \,\rangle$ が成り立つ。さらにこれは

$$
\begin{array}{rcl}
\langle\, T_c[\![E']\!] \,|\, T_e[\![V\ M]\!] \,\rangle & = & \langle\, T_c[\![E']\!] \,|\, T_f[\![V]\!] \uparrow T_e[\![M]\!] \,\rangle \\
& \rightsquigarrow & \langle\, T_c[\![E']\!] \,|\, T_f[\![V]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \,\rangle \\
& \approx & \langle\, T_c[\![E']\!] \downarrow T_f[\![V]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \,\rangle \\
& = & \langle\, T_c[\![E']\!] \downarrow T_F[\![V\ [\,]]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \,\rangle \\
& = & \langle\, T_c[\![E'[V\ [\,]]]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \,\rangle
\end{array}
$$

となり、命題を満たす。

(3) $E = E'[F], E' = [\,], F = [\,]\ M'$ の場合。$\langle \bullet \,|\, T_e[\![E'[[M]\ M']]\!] \,\rangle$ は帰納法の仮定より $\langle\, T_c[\![E']\!] \,|\, T_e[\![[M]\ M']\!] \,\rangle$ が成り立つ。さらにこれは

$$
\begin{array}{rcl}
\langle\, T_c[\![E']\!] \,|\, T_e[\![[M]\ M']\!] \,\rangle & = & \langle\, T_c[\![E']\!] \,|\, T_f[\![M]\!] \uparrow T_e[\![M']\!] \,\rangle \\
& \rightsquigarrow & \langle\, T_c[\![E']\!] \,|\, T_f[\![M]\!] \,|\, T_e[\![M']\!] \,\rangle \\
& = & \langle\, T_c[\![E']\!] \,|\, \overline{T_e[\![M]\!]} \,|\, T_e[\![M']\!] \,\rangle\ (M\ \text{は}\lambda x.\,M, \mathcal{C}\text{のみ}) \\
& \rightsquigarrow & \langle\, [T_c[\![E']\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![M']\!])] \,|\, T_e[\![M]\!] \,\rangle \\
& = & \langle\, [T_c[\![E']\!] \downarrow T_F[\![[\,]\ M']\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \,\rangle \\
& = & \langle\, T_c[\![E'[[\,]\ M']]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \,\rangle
\end{array}
$$

となり命題を満たす。

以上 (1)〜(3) より、命題は成り立つ。 □

定理 A.1.16 Left-to-right Λ_C 計算の式 M について $M \rightsquigarrow N$ が成り立ち、かつ $\vdash T[\![M]\!] : +\mathsf{int}$ なら、$T[\![M]\!] \approx T[\![N]\!]$ が成り立つ。

証明

(1) $E[(\lambda x.\, M)\, V] \rightsquigarrow E[M[V/x]]$ の場合。補題 A.1.15 から

$$\begin{array}{rcl} T[\![E[(\lambda x.\, M)\, V]]\!] & \approx & \langle\, T_c[\![E]\!] \mid T_e[\![(\lambda x.\, M)\, V]\!] \,\rangle \\ & = & \langle\, T_c[\![E]\!] \mid T_f[\![\lambda x.\, M]\!] \uparrow T_e[\![V]\!] \,\rangle \\ & = & \langle\, T_c[\![E]\!] \mid (x \Rightarrow T_e[\![M]\!]) \uparrow T_e[\![V]\!] \,\rangle \\ & \rightsquigarrow & \langle\, T_c[\![E]\!] \mid x \Rightarrow T_e[\![M]\!] \mid T_e[\![V]\!] \,\rangle \\ & \rightsquigarrow & \langle\, T_c[\![E]\!] \mid T_e[\![M]\!][T_e[\![V]\!]/x] \,\rangle (T_e[\![V]\!] \text{ は値より}) \end{array}$$

$$T[\![E[M[V/x]]]\!] \approx \langle\, T_c[\![E]\!] \mid T_e[\![M[V/x]]\!] \,\rangle$$

Call-by-value Left-to-right SLC の代入補題 A.1.17 より

$$\langle\, T_c[\![E]\!] \mid T_e[\![M]\!][T_e[\![V]\!]/x] \,\rangle = \langle\, T_c[\![E]\!] \mid T_e[\![M[V/x]]\!] \,\rangle$$

が成り立ち、命題を満たす。

(2) $E[\mathcal{C}\, V] \rightsquigarrow V\, (\lambda x.\, \mathcal{A}\, (E[x])) = V\, (\lambda x.\, (\mathcal{C}\, (\lambda\_.\, E[x])))$ の場合。補題 A.1.15 から

$$\begin{array}{rl} & T[\![E[\mathcal{C}\, V]]\!] \\ \approx & \langle\, T_c[\![E]\!] \mid T_e[\![\mathcal{C}\, V]\!] \,\rangle \\ = & \langle\, T_c[\![E]\!] \mid T_f[\![\mathcal{C}]\!] \uparrow T_e[\![V]\!] \,\rangle \\ = & \langle\, T_c[\![E]\!] \mid (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow T_e[\![V]\!] \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle\, T_c[\![E]\!] \mid y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)] \mid T_e[\![V]\!] \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow (\lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil))] \mid T_e[\![V]\!] \,\rangle \\ = & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow (\lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil))] \mid \lceil T_f[\![V]\!] \rceil \,\rangle\ (V \text{ は} \lambda x.\, M \text{ 又は} \mathcal{C} \text{であるので}) \\ \rightsquigarrow & \langle\, \bullet \mid T_f[\![V]\!] \uparrow (\lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil) \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle\, \bullet \mid T_f[\![V]\!] \mid \lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil \,\rangle \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & T[\![V\, (\lambda x.\, (\mathcal{C}\, (\lambda\_.\, E[x])))]\!] \\ \approx & \langle\, \bullet \mid T_e[\![V\, (\lambda x.\, \mathcal{A}\, (E[x]))]\!] \,\rangle \\ = & \langle\, \bullet \mid T_f[\![V]\!]\, (\lambda x.\, (\mathcal{C}\, (\lambda\_.\, E[x]))) \,\rangle \\ = & \langle\, \bullet \mid T_f[\![V]\!] \uparrow T_e[\![\lambda x.\, (\mathcal{C}\, (\lambda\_.\, E[x]))]\!] \,\rangle \\ = & \langle\, \bullet \mid T_f[\![V]\!] \uparrow (\lceil x \Rightarrow T_e[\![(\mathcal{C}\, (\lambda\_.\, E[x]))]\!] \rceil) \,\rangle \\ = & \langle\, \bullet \mid T_f[\![V]\!] \uparrow (\lceil x \Rightarrow (T_f[\![\mathcal{C}]\!] \uparrow T_e[\![\lambda\_.\, E[x]]\!]) \rceil) \,\rangle \\ = & \langle\, \bullet \mid T_f[\![V]\!] \uparrow (\lceil x \Rightarrow ((y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow (\lceil \_ \Rightarrow T_e[\![E[x]]\!] \rceil)) \rceil) \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle\, \bullet \mid T_f[\![V]\!] \mid \lceil x \Rightarrow ((y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow (\lceil \_ \Rightarrow T_e[\![E[x]]\!] \rceil)) \rceil \,\rangle \end{array}$$

Call-by-value Left-to-right SLC の論理関係の基本定理 A.2.5 より $\langle\, \bullet \mid T_f[\![V]\!] \mid \lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil \,\rangle$ と $\langle\, \bullet \mid T_f[\![V]\!] \mid \lceil x \Rightarrow ((y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow (\lceil \_ \Rightarrow T_e[\![E[x]]\!] \rceil)) \rceil \,\rangle$ の項部分は同等な式であることが言え、命題はを満たす。この詳しい証明は後ほどを参照されたい。

(1)(2) より命題は成り立つ。 □

補題 A.1.17 (Call-by-value Left-to-right SLC の代入補題) $T_e[\![M]\!][T_e[\![V]\!]/x] = T_e[\![M[V/x]]\!]$

証明

評価戦略によらず証明できるので、Call-by-value Right-to-Left の時と、全く同じように証明ができるので省略する。 □

以上より、SLC に Call-by-value Left-to-right Λ_C 計算を埋め込むことができる。

A.1.6 Call-by-name SLC の簡約の一意性

命題 A.1.18 Call-by-value Right-to-left SLC の簡約は型を持つならば一意的である。

証明

Call-by-name SLC の全ての c, f, e の組み合わせにおいて、型を持つならば一意に簡約できることを示す。

1. $\langle c \,|\, e \rangle$ の場合。
   (a) $c = k$ の場合。
      i. $k = y$ の場合。
         A. $e = v$ の場合。
            $v = x$ の場合。$\langle y \,|\, x \rangle$ は型エラーとなる。
            $v = \lceil f \rceil$ の場合。$\langle y \,|\, \lceil f \rceil \rangle$ は型エラーとなる。
            $v = n$ の場合。$\langle y \,|\, n \rangle$
            $v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e']$ の場合。$\langle y \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e'] \rangle$ は型エラーとなる。
         B. $e = f \uparrow e'$ の場合。$\langle y \,|\, f \uparrow e' \rangle$ は型エラーとなる。
      ii. $k = \lfloor f \rfloor$ の場合。
         A. $e = v$ の場合。
            $v = x$　の場合。$\langle \lfloor f \rfloor \,|\, x \rangle$ は型エラーとなる。
            $v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle \lfloor f \rfloor \,|\, \lceil f' \rceil \rangle$ は型エラーとなる。
            $v = n$ の場合。$\langle \lfloor f \rfloor \,|\, n \rangle$ は型エラーとなる。
            $v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e']$ の場合。$\langle \lfloor f \rfloor \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow e'] \rangle \rightsquigarrow \langle f \,|\, c' \,|\, e' \rangle$ と簡約される。
         B. $e = f' \uparrow e'$ の場合。$\langle \lfloor f \rfloor \,|\, f' \uparrow e' \rangle \rightsquigarrow \langle \lfloor f \rfloor \,|\, f' \rangle e'$ と簡約される。
      iii. $k = \bullet$ の場合。
         A. $e = v$ の場合。
            $v = x$　の場合。$\langle \bullet \,|\, x \rangle \rightsquigarrow x$ と簡約される。
            $v = \lceil f \rceil$　の場合。$\langle \bullet \,|\, \lceil f \rceil \rangle \rightsquigarrow \lceil f \rceil$ と簡約される。
            $v = n$　の場合。$\langle \bullet \,|\, n \rangle \rightsquigarrow n$ と簡約される。
            $v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e']$　の場合。$\langle \bullet \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'] \rangle \rightsquigarrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e']$ と簡約される。
         B. $e = f \uparrow e'$ の場合。$\langle \bullet \,|\, f \uparrow e' \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \,|\, f \,|\, e' \rangle$ と簡約される。

iv. $k = [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')]$　の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, x \,\rangle$ は型エラーとなる。

$v = \lceil f \rceil$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \lceil f \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, k' \,|\, f \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, n \,\rangle$ は型エラーとなる。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k'' \downarrow f_y) \uparrow e'']$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k'' \downarrow f_y) \uparrow e''] \,\rangle$ は型エラーとなる。

B. $e = f \uparrow e''$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, f \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, f \,|\, e'' \,\rangle$ と簡約される。

(b) $c = c' \downarrow f$ の場合。

i. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, f \,|\, x \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, f \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, f \,|\, n \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e']$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, f \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'] \,\rangle$ と簡約される。

ii. $e = f' \uparrow e'$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, f \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle$ と簡約される。

2. $\langle\, c \,|\, f \,|\, e \,\rangle$ の場合。

(a) $c = k$ の場合。

i. $k = y$ の場合。

(f1) $f = x \Rightarrow e'$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x'$ の場合。$\langle\, y \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, x' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, y \,|\, e'[x'/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, y \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, y \,|\, e'[\lceil f' \rceil/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, y \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, y \,|\, e'[n/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'']$ の場合。$\langle\, y \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e''] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, y \,|\, e'[[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'']/x] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, y \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, f' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, y \,|\, e'[f' \uparrow e''/x] \,\rangle$ と簡約される。

(f2) $f = y' \Leftarrow c'$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, y \,|\, y' \Leftarrow c' \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[y/y'] \,|\, x \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, y \,|\, y' \Leftarrow c' \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[y/y'] \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, y \,|\, y' \Leftarrow c' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[y/y'] \,|\, n \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c'' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle\, y \,|\, y' \Leftarrow c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[y/y'] \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e'$ の場合。$\langle\, y \,|\, y' \Leftarrow c' \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[y/y'] \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle$ と簡約される。

(f3) $f = \overline{e'}$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, y \,|\, \overline{e'} \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow y \downarrow f_y) \uparrow x] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, y \,|\, \overline{e'} \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow y \downarrow f_y) \uparrow \lceil f' \rceil] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, y \,|\, \overline{e'} \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow y \downarrow f_y) \uparrow n] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'']$ の場合。$\langle\, y \,|\, \overline{e'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e''] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow y \downarrow f_y) \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'']] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, y \,|\, \overline{e'} \,|\, f' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow y \downarrow f_y) \uparrow (f' \uparrow e'')] \,|\, e' \,\rangle$ と簡約される。

(f4) $f = \underline{c'}$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, y \,|\, \underline{c'} \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow y \downarrow f_y) \uparrow x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, y \,|\, \underline{c'} \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow y \downarrow f_y) \uparrow \lceil f' \rceil] \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, y \,|\, \underline{c'} \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow y \downarrow f_y) \uparrow x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e']$ の場合。$\langle\, y \,|\, \underline{c'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow y \downarrow f_y) \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e']] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e'$ の場合。$\langle\, y \,|\, \underline{c'} \,|\, f' \uparrow e' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow y \downarrow f_y) \uparrow (f' \uparrow e')] \,\rangle$ と簡約される。

ii. $k = \lfloor f' \rfloor$ の場合。

(f1) $f = x \Rightarrow e'$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x'$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, x' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, e'[x'/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, e'[\lceil f'' \rceil/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, e'[n/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'']$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e''] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, e'[[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'']/x] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f'' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, f'' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, \lfloor f' \rfloor \,|\, e'[f'' \uparrow e''/x] \,\rangle$ と簡約される。

(f2) $f = y \Leftarrow c'$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle \lfloor f' \rfloor \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, x \rangle \rightsquigarrow \langle c'[\lfloor f' \rfloor / y] \,|\, x \rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle \lfloor f' \rfloor \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, \lceil f'' \rceil \rangle \rightsquigarrow \langle c'[\lfloor f' \rfloor / y] \,|\, \lceil f'' \rceil \rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle \lfloor f' \rfloor \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, n \rangle \rightsquigarrow \langle c'[\lfloor f' \rfloor / y] \,|\, n \rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e']$ の場合。$\langle \lfloor f' \rfloor \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'] \rangle \rightsquigarrow \langle c'[\lfloor f' \rfloor / y] \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'] \rangle$ と簡約される。

B. $e = f'' \uparrow e'$ の場合。$\langle \lfloor f' \rfloor \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, f'' \uparrow e' \rangle \rightsquigarrow \langle c'[\lfloor f' \rfloor / y] \,|\, f'' \uparrow e' \rangle$ と簡約される。

(f3) $f = \overline{e'}$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle \lfloor f' \rfloor \,|\, \overline{e'} \,|\, x \rangle \rightsquigarrow \langle [\lfloor f' \rfloor \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow x)] \,|\, e' \rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle \lfloor f' \rfloor \,|\, \overline{e'} \,|\, \lfloor f'' \rfloor \rangle \rightsquigarrow \langle [\lfloor f' \rfloor \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow x)] \,|\, e' \rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle \lfloor f' \rfloor \,|\, \overline{e'} \,|\, n \rangle \rightsquigarrow \langle [\lfloor f' \rfloor \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow x)] \,|\, e' \rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v']$ の場合。$\langle \lfloor f' \rfloor \,|\, \overline{e'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c' \downarrow f_y) \uparrow v'] \rangle \rightsquigarrow \langle [\lfloor f' \rfloor \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow x)] \,|\, e' \rangle$ と簡約される。

B. $e = f'' \uparrow e''$ の場合。$\langle \lfloor f' \rfloor \,|\, \overline{e'} \,|\, f'' \uparrow e'' \rangle \rightsquigarrow \langle [\lfloor f' \rfloor \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow x)] \,|\, e' \rangle$ と簡約される。

(f4) $f = \underline{c'}$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle \lfloor f' \rfloor \,|\, \underline{c'} \,|\, x \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \lfloor f' \rfloor \downarrow f_y) \uparrow x] \rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle \lfloor f' \rfloor \,|\, \underline{c'} \,|\, \lceil f'' \rceil \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \lfloor f' \rfloor \downarrow f_y) \uparrow \lceil f'' \rceil] \rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle \lfloor f' \rfloor \,|\, \underline{c'} \,|\, n \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \lfloor f' \rfloor \downarrow f_y) \uparrow n] \rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e']$ の場合。$\langle \lfloor f' \rfloor \,|\, \underline{c'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'] \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \lfloor f' \rfloor \downarrow f_y) \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e']] \rangle$ と簡約される。

B. $e = f'' \uparrow e'$ の場合。$\langle \lfloor f' \rfloor \,|\, \underline{c'} \,|\, f'' \uparrow e' \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \lfloor f' \rfloor \downarrow f_y) \uparrow (f'' \uparrow e')] \rangle$ と簡約される。

iii. $k = \bullet$ の場合。

(f1) $f = x \Rightarrow e'$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x'$ の場合。$\langle \bullet \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, x' \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \,|\, e'[x'/x] \rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle \bullet \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, \lceil f' \rceil \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \,|\, e'[\lceil f' \rceil/x] \rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle \bullet \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, n \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \,|\, e'[n/x] \rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'']$ の場合。$\langle \bullet \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e''] \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \,|\, e'[[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'']/x] \rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e''$ の場合。$\langle \bullet \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, f' \uparrow e'' \rangle \rightsquigarrow \langle \bullet \,|\, e'[f' \uparrow e''/x] \rangle$ と簡約される。

(f2) $f = y \Leftarrow c'$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle \bullet \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, x \rangle \rightsquigarrow \langle c'[\bullet/y] \,|\, x \rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle \bullet \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, \lceil f' \rceil \rangle \rightsquigarrow \langle c'[\bullet/y] \,|\, \lceil f' \rceil \rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle \bullet \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, n \rangle \rightsquigarrow \langle c'[\bullet/y] \,|\, n \rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e']$ の場合。$\langle \bullet \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'] \rangle \rightsquigarrow \langle c'[\bullet/y] \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'] \rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e'$ の場合。$\langle \bullet \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, f' \uparrow e' \rangle \rightsquigarrow \langle c'[\bullet/y] \,|\, f' \uparrow e' \rangle$ と簡約される。

(f3) $f = \overline{e'}$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \overline{e'} \,|\, x \rangle \rightsquigarrow \langle [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow x)] \,|\, e' \rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \overline{e'} \,|\, \lceil f' \rceil \rangle \rightsquigarrow \langle [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil f' \rceil)] \,|\, e' \rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \overline{e'} \,|\, n \rangle \rightsquigarrow \langle [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow n)] \,|\, e' \rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'']$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \overline{e'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e''] \rangle \rightsquigarrow \langle [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e''])] \,|\, e' \rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e''$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \overline{e'} \,|\, f' \uparrow e'' \rangle \rightsquigarrow \langle [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow (f' \uparrow e''))] \,|\, e' \rangle$ と簡約される。

(f4) $f = \underline{c'}$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \underline{c'} \,|\, x \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \bullet \downarrow f_y) \uparrow x] \rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \underline{c'} \,|\, \lceil f' \rceil \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \bullet \downarrow f_y) \uparrow \lceil f' \rceil] \rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \underline{c'} \,|\, n \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \bullet \downarrow f_y) \uparrow n] \rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e']$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \underline{c'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'] \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \bullet \downarrow f_y) \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e']] \rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e'$ の場合。$\langle \bullet \,|\, \underline{c'} \,|\, f' \uparrow e' \rangle \rightsquigarrow \langle c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow \bullet \downarrow f_y) \uparrow (f' \uparrow e')] \rangle$ と簡約される。

iv. $k = [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')]$

(f1) $f = x \Rightarrow e''$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x'$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, x \Rightarrow e'' \,|\, x' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, e''[x'/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, x \Rightarrow e'' \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, e''[\lceil f' \rceil/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, x \Rightarrow e'' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, e''[n/x] \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k'' \downarrow f_y) \uparrow e''']$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, x \Rightarrow e'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k'' \downarrow f_y) \uparrow e'''] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, e''[[(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k'' \downarrow f_y) \uparrow e''']/x] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e'''$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, x \Rightarrow e'' \,|\, f' \uparrow e''' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, e''[f' \uparrow e'''/x] \,\rangle$ と簡約される。

(f2) $f = y \Leftarrow c''$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[[k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')]/y] \,|\, x \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[[k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')]/y] \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[[k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')]/y] \,|\, n \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k'' \downarrow f_y) \uparrow e'']$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k'' \downarrow f_y) \uparrow e''] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[[k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')]/y] \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k'' \downarrow f_y) \uparrow e''] \,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, y \Leftarrow c' \,|\, f' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c'[[k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')]/y] \,|\, f' \uparrow e'' \,\rangle$ と簡約される。

(f3) $f = \overline{e''}$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \overline{e''} \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [[k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow x)] \,|\, e'' \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \overline{e''} \,|\, \lceil f' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [[k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil f' \rceil)] \,|\, e'' \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \overline{e''} \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [[k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow n)] \,|\, e'' \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k'' \downarrow f_y) \uparrow e'''']$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \overline{e''} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k'' \downarrow f_y) \uparrow e''']\,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [[k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k'' \downarrow f_y) \uparrow e'''])] \,|\, e''\,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e'''$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \overline{e''} \,|\, f' \uparrow e'''\,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [[k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow (f' \uparrow e'''))] \,|\, e''\,\rangle$ と簡約される。

(f4) $f = \underline{c'}$ の場合。

A. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \underline{c'} \,|\, x\,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow f_y) \uparrow x]\,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f' \rceil$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \underline{c'} \,|\, \lceil f' \rceil\,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow f_y) \uparrow \lceil f' \rceil]\,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \underline{c'} \,|\, n\,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow f_y) \uparrow n]\,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k'' \downarrow f_y) \uparrow e''']$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \underline{c'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k'' \downarrow f_y) \uparrow e''']\,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow f_y) \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k'' \downarrow f_y) \uparrow e''']]\,\rangle$ と簡約される。

B. $e = f' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \,|\, \underline{c'} \,|\, f' \uparrow e''\,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow [k' \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e')] \downarrow f_y) \uparrow (f' \uparrow e'')]\,\rangle$ と簡約される。

(b) $c = c' \downarrow f'$ の場合。

(f1) $f = x \Rightarrow e'$ の場合。

i. $e = v$ の場合。

$v = x'$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, x'\,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, (x \Rightarrow e') \uparrow x'\,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, \lceil f'' \rceil\,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, (x \Rightarrow e') \uparrow \lceil f'' \rceil\,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, x \Rightarrow e' \,|\, n\,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, (x \Rightarrow e') \uparrow n\,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'']$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, x \Rightarrow e \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'']\,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, (x \Rightarrow e') \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'']\,\rangle$ と簡約される。

ii. $e = f'' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, x \Rightarrow e \,|\, f'' \uparrow e''\,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, (x \Rightarrow e') \uparrow (f'' \uparrow e'')\,\rangle$ と簡約される。

(f2) $f = y \Leftarrow c''$ の場合。

i. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, x\,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, (y \Leftarrow c'') \uparrow x\,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, (y \Leftarrow c'') \uparrow \lceil f'' \rceil \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, (y \Leftarrow c'') \uparrow n \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e']$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, (y \Leftarrow c'') \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'] \,\rangle$ と簡約される。

ii. $e = f'' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, y \Leftarrow c'' \,|\, f'' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, (y \Leftarrow c'') \uparrow (f'' \uparrow e'') \,\rangle$ と簡約される。

(f3) $f = \overline{e'}$ の場合。

i. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \overline{e'} \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, \overline{e'} \uparrow x \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \overline{e'} \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, \overline{e'} \uparrow \lceil f'' \rceil \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \overline{e'} \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, \overline{e'} \uparrow n \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e'']$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \overline{e'} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e''] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, \overline{e'} \uparrow [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k' \downarrow f_y) \uparrow e''] \,\rangle$ と簡約される。

ii. $e = f'' \uparrow e''$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \overline{e'} \,|\, f'' \uparrow e'' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, \overline{e'} \uparrow (f'' \uparrow e'') \,\rangle$ と簡約される。

(f4) $f = \underline{c''}$ の場合。

i. $e = v$ の場合。

$v = x$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \underline{c''} \,|\, x \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, \underline{c''} \uparrow x \,\rangle$ と簡約される。

$v = \lceil f'' \rceil$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \underline{c''} \,|\, \lceil f'' \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, \underline{c''} \uparrow FtoEf'' \,\rangle$ と簡約される。

$v = n$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \underline{c''} \,|\, n \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, \underline{c''} \uparrow n \,\rangle$ と簡約される。

$v = [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k'' \downarrow f_y) \uparrow e']$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \underline{c''} \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k'' \downarrow f_y) \uparrow e'] \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, \underline{k''} \uparrow e' \,\rangle$ と簡約される。

ii. $e = f'' \uparrow e'$ の場合。$\langle\, c' \downarrow f' \,|\, \underline{c''} \,|\, f'' \uparrow e' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c' \downarrow f' \,|\, \underline{c''} \uparrow (f'' \uparrow e') \,\rangle$ と簡約される。

以上より命題は成り立つ。 □

A.1.7　$\lambda\mu$ 計算から Call-by-name SLC への変換についての定理と補題

補題 A.1.19 $\langle \bullet \,|\, T_e\llbracket E[M] \rrbracket \rangle \approx \langle T_c\llbracket E \rrbracket \,|\, T_e\llbracket M \rrbracket \rangle$

証明

E の構造に関する帰納法より証明する。

(1) $E = [\,]$ の場合。$\langle \bullet \,|\, T_e\llbracket M \rrbracket \rangle = \langle T_c\llbracket [\,] \rrbracket \,|\, T_e\llbracket M \rrbracket \rangle$ となり、命題を満たす。

(2) $E = E'[F], E' = [\,], F = [\,]\ M'$ の場合。$\langle \bullet \,|\, T_e\llbracket E'[[M]\ M'] \rrbracket \rangle$ は帰納法の仮定より $\langle T_c\llbracket E' \rrbracket \,|\, T_e\llbracket [M]\ M'\rrbracket$ が成り立つ。さらにこれは

$$
\begin{array}{rcl}
\langle T_c\llbracket E' \rrbracket \,|\, T_e\llbracket [M]\ M' \rrbracket \rangle & = & \langle T_c\llbracket E' \rrbracket \,|\, T_f\llbracket M \rrbracket \uparrow T_e\llbracket M' \rrbracket \rangle \\
& \rightsquigarrow & \langle T_c\llbracket E' \rrbracket \,|\, T_f\llbracket M \rrbracket \,|\, T_e\llbracket M' \rrbracket \rangle \\
& = & \langle T_c\llbracket E' \rrbracket \,|\, \overline{T_e\llbracket M \rrbracket} \,|\, T_e\llbracket M' \rrbracket \rangle\ (M \text{ は} \lambda x.\, M, \mathcal{C} \text{のみ}) \\
& \approx & \langle T_c\llbracket E' \rrbracket \,|\, \lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e\llbracket M' \rrbracket \,|\, T_e\llbracket M \rrbracket \rangle \\
& \approx & \langle T_c\llbracket E' \rrbracket \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e\llbracket M' \rrbracket) \,|\, T_e\llbracket M \rrbracket \rangle \\
& \approx & \langle T_c\llbracket E' \rrbracket \downarrow (T_F\llbracket [\,]\ M' \rrbracket) \,|\, T_e\llbracket M \rrbracket \rangle \\
& = & \langle T_c\llbracket E'[[\,]\ M'] \rrbracket \,|\, T_e\llbracket M \rrbracket \rangle
\end{array}
$$

となり、命題を満たす。

以上 (1)(2) より、命題は成り立つ。 □

定理 A.1.20 $\lambda\mu$ 計算の式 M について $M \rightsquigarrow N$ が成り立ち、かつ $\vdash T\llbracket M \rrbracket : +\mathsf{int}$ なら、$T\llbracket M \rrbracket \approx T\llbracket N \rrbracket$ が成り立つ。

証明

(1) $E[(\lambda x.\, M)\, N] \rightsquigarrow E[M[N/x]]$ の場合。定理から

$$
\begin{array}{rcl}
T\llbracket E[(\lambda x.\, M)\, N] \rrbracket & \approx & \langle T_c\llbracket E \rrbracket \,|\, T_e\llbracket (\lambda x.\, M)\, N \rrbracket \rangle \\
& = & \langle T_c\llbracket E \rrbracket \,|\, T_f\llbracket \lambda x.\, M \rrbracket \uparrow T_e\llbracket N \rrbracket \rangle \\
& = & \langle T_c\llbracket E \rrbracket \,|\, (x \Rightarrow T_e\llbracket M \rrbracket) \uparrow T_e\llbracket N \rrbracket \rangle \\
& \rightsquigarrow & \langle T_c\llbracket E \rrbracket \,|\, x \Rightarrow T_e\llbracket M \rrbracket \,|\, T_e\llbracket N \rrbracket \rangle\ (T_c\llbracket \cdot \rrbracket \text{ は必ず継続値}) \\
& \rightsquigarrow & \langle T_c\llbracket E \rrbracket \,|\, T_e\llbracket M \rrbracket[T_e\llbracket N \rrbracket/x] \rangle
\end{array}
$$

$$
T\llbracket E[M[N/x]] \rrbracket \approx \langle T_c\llbracket E \rrbracket \,|\, T_e\llbracket M[N/x] \rrbracket \rangle
$$

Call-by-name SLC の代入補題補題 A.1.21 より $\langle T_c\llbracket E \rrbracket \,|\, T_e\llbracket M \rrbracket[T_e\llbracket N \rrbracket/x] \rangle = \langle T_c\llbracket E \rrbracket \,|\, T_e\llbracket M[N/x] \rrbracket \rangle$ が成り立ち、命題を満たす。

(2) $E[(\mu\alpha.\,M)\,N] \rightsquigarrow E[\mu\alpha'.\,M[\lambda x.\,\alpha'\,(x\,N)/\alpha]]$ の場合。補題 A.1.19 から

$$
\begin{array}{cl}
 & T[\![E[(\mu\alpha.\,M)\,N]]\!] \\
\approx & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![(\mu\alpha.\,M)\,N]\!]\,\rangle \\
= & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![\mu\alpha.\,M]\!] \uparrow T_e[\![N]\!]\,\rangle \\
= & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, \mathcal{C}\,(\lambda\alpha.\,M) \uparrow T_e[\![N]\!]\,\rangle \\
= & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, (\overline{T_f[\![\mathcal{C}]\!] \uparrow T_e[\![\lambda\alpha.\,M]\!]}) \uparrow T_e[\![N]\!]\,\rangle \\
= & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, (\overline{(y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil \alpha \Rightarrow T_e[\![M]\!] \rceil}) \uparrow T_e[\![N]\!]\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, \overline{(y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil \alpha \Rightarrow T_e[\![M]\!] \rceil} \,|\, T_e[\![N]\!]\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, [T_c[\![E]\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![N]\!])] \,|\, (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow (\lceil \alpha \Rightarrow T_e[\![M]\!] \rceil)\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, [T_c[\![E]\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![N]\!])] \,|\, y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)] \,|\, \lceil \alpha \Rightarrow T_e[\![M]\!] \rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow [T_c[\![E]\!] \downarrow \lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![N]\!]] \rceil)] \,|\, \lceil \alpha \Rightarrow T_e[\![M]\!] \rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, \alpha \Rightarrow T_e[\![M]\!] \,|\, \lceil \_ \Leftarrow [T_c[\![E]\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![N]\!])] \rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![M]\!][\lceil \_ \Leftarrow [T_c[\![E]\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![N]\!])] \rceil/\alpha]\,\rangle
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cl}
 & T[\![E[\mu\alpha'.\,M[\lambda x.\,\alpha'\,(x\,N)/\alpha]]]\!] \\
\approx & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![(\mu\alpha'.\,M)[\lambda x'.\,\alpha'\,(x'\,N)/\alpha]]\!]\,\rangle \\
= & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![\mathcal{C}\,(\lambda\alpha'.\,M)[\lambda x'.\,\alpha'\,(x'\,N)/\alpha]]\!]\,\rangle \\
= & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_f[\![\mathcal{C}]\!] \uparrow T_e[\![(\lambda\alpha'.\,M)[\lambda x'.\,\alpha'\,(x'\,N)/\alpha]]\!]\,\rangle \\
= & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil \alpha \Rightarrow T_e[\![M[\lambda x'.\,\alpha'\,(x'\,N)/\alpha]]\!] \rceil\,\rangle \\
= & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil \alpha' \Rightarrow T_e[\![M]\!][T_e[\![\lambda x'.\,\alpha'\,(x'\,N)]\!]/\alpha] \rceil\,\rangle (\text{代入補題より}) \\
= & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil \alpha' \Rightarrow T_e[\![M]\!][\lceil x' \Rightarrow (T_f[\![\alpha']\!] \uparrow T_e[\![x'\,N]\!]) \rceil/\alpha] \rceil\,\rangle \\
= & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil \alpha' \Rightarrow T_e[\![M]\!][\lceil x' \Rightarrow (\overline{\alpha'} \uparrow (T_f[\![x']\!] \uparrow T_e[\![N]\!])) \rceil/\alpha] \rceil\,\rangle \\
= & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil \alpha' \Rightarrow T_e[\![M]\!][\lceil x' \Rightarrow (\overline{\alpha'} \uparrow (\overline{x'} \uparrow T_e[\![N]\!])) \rceil/\alpha] \rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)] \,|\, \lceil \alpha' \Rightarrow T_e[\![M]\!][\lceil x' \Rightarrow (\overline{\alpha'} \uparrow (\overline{x'} \uparrow T_e[\![N]\!])) \rceil/\alpha] \rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil)] \,|\, \lceil \alpha' \Rightarrow T_e[\![M]\!][\lceil x' \Rightarrow (\overline{\alpha'} \uparrow (x' \uparrow T_e[\![N]\!])) \rceil/\alpha] \rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, \alpha' \Rightarrow T_e[\![M]\!][\lceil x' \Rightarrow (\overline{\alpha'} \uparrow (\overline{x'} \uparrow T_e[\![N]\!])) \rceil/\alpha] \,|\, \lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil\,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![M]\!][\lceil x' \Rightarrow (\overline{\lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil} \uparrow (\overline{x'} \uparrow T_e[\![N]\!])) \rceil/\alpha]\,\rangle
\end{array}
$$

Call-by-name SLC の論理関係の基本定理 A.2.8 より $\langle\, \bullet \,|\, T_e[\![M]\!][\lceil \_ \Leftarrow [T_c[\![E]\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![N]\!])] \rceil/\alpha]\,\rangle$ と $\langle\, \bullet \,|\, T_e[\![M]\!][\lceil x' \Rightarrow (\overline{\lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil} \uparrow (\overline{x'} \uparrow T_e[\![N]\!])) \rceil/\alpha]\,\rangle$ の項部分は同等な式であることが言え、命題を満たす。この証明は後ほど参照されたい。

(3) $E[\mu\alpha.\,[\alpha]M] \rightsquigarrow E[M]$ (α は M に現れない) の場合。補題 A.1.19 から

$$\begin{array}{cl}
& T[\![[\mu\alpha.\,[\alpha]\,M]]\!] \\
\approx & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![\mu\alpha.\,[\alpha]\,M]\!] \,\rangle \\
= & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![\mathcal{C}\,(\lambda\alpha.\,[\alpha]\,M)]\!] \,\rangle \\
= & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, (T_f[\![\mathcal{C}]\!]) \uparrow T_e[\![\lambda\alpha.\,[\alpha]\,M]\!] \,\rangle \\
= & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil {_} \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil \alpha \Rightarrow T_e[\![[\alpha]\,M]\!] \rceil \,\rangle \\
= & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil {_} \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil \alpha \Rightarrow (T_f[\![\alpha]\!] \uparrow T_e[\![M]\!]) \rceil \,\rangle \\
= & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil {_} \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil \alpha \Rightarrow (\overline{\alpha} \uparrow T_e[\![M]\!]) \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil {_} \Leftarrow y \rceil)] \,|\, \lceil \alpha \Rightarrow (\overline{\alpha} \uparrow T_e[\![M]\!]) \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil {_} \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil)] \,|\, \lceil \alpha \Rightarrow (\overline{\alpha} \uparrow T_e[\![M]\!]) \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, \alpha \Rightarrow (\overline{\alpha} \uparrow T_e[\![M]\!]) \,|\, \lceil {_} \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, \overline{\lceil {_} \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil} \uparrow T_e[\![M]\!] \,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![M]\!])] \,|\, \lceil {_} \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, {_} \Leftarrow T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \,\rangle \\
= & T[\![E[M]]\!]
\end{array}$$

となり、命題を満たす。

(4) $\mu\alpha.\,M \rightsquigarrow M[\lambda x.\,\mathcal{A}\,x/\alpha] = M[\lambda x.\,(\mathcal{C}\,(\lambda_{\_}.\,x))/\alpha]$ の場合。補題 A.1.19 から

$$\begin{array}{cl}
& T[\![\mu\alpha.\,M]\!] \\
\approx & \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![\mu\alpha.\,M]\!] \,\rangle \\
= & \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![\mathcal{C}\,(\lambda\alpha.\,M)]\!] \,\rangle \\
= & \langle\, \bullet \,|\, T_f[\![\mathcal{C}]\!] \uparrow T_e[\![\lambda\alpha.\,M]\!] \,\rangle \\
= & \langle\, \bullet \,|\, (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil {_} \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil \alpha \Rightarrow T_e[\![M]\!] \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil {_} \Leftarrow y \rceil)] \,|\, \lceil \alpha \Rightarrow T_e[\![M]\!] \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil c \Leftarrow \bullet \rceil)] \,|\, \lceil \alpha \Rightarrow T_e[\![M]\!] \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, \alpha \Rightarrow T_e[\![M]\!] \,|\, \lceil c \Leftarrow \bullet \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![M]\!][\lceil c \Leftarrow \bullet \rceil/\alpha] \,\rangle
\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}
& T[\![M[\lambda x.\,(\mathcal{C}\,(\lambda_{_}.\,x))/\alpha]]\!] \\
\approx & \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![M[\lambda x.\,\mathcal{A}\,x/\alpha]]\!] \,\rangle \\
= & \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![M[\lambda x.\,(\mathcal{C}\,(\lambda_{_}.\,x))/\alpha]]\!] \,\rangle \\
= & \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![M]\!][T_e[\![\lambda x.\,(\mathcal{C}\,(\lambda_{_}.\,x))]\!]/\alpha] \,\rangle \\
= & \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![M]\!][\lceil x \Rightarrow T_e[\![\mathcal{C}\,(\lambda_{_}.\,x)]\!] \rceil/\alpha] \,\rangle \\
= & \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![M]\!][\lceil x \Rightarrow T_f[\![\mathcal{C}]\!] \uparrow T_e[\![\lambda_{_}.\,x]\!] \rceil/\alpha] \,\rangle \\
= & \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![M]\!][\lceil x \Rightarrow (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil {_} \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil {_} \Rightarrow x \rceil \rceil/\alpha] \,\rangle
\end{array}$$

Call-by-name SLC の論理関係の基本定理 A.2.8 より $\langle\, \bullet \,|\, T_e[\![M]\!][\lceil c \Leftarrow \bullet \rceil/\alpha] \,\rangle$ と $\langle\, \bullet \,|\, T_e[\![M]\!][\lceil x \Rightarrow (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil {\_} \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil {\_} \Rightarrow x \rceil \rceil/\alpha] \,\rangle$ の項部分は同等な式であることが言え、命題を満たす。この証明は後ほど参照されたい。

(1)〜(4) より命題は成り立つ。 □

補題 A.1.21 (Call-by-name SCL の代入補題) $T_e[\![M]\!][T_e[\![N]\!]/x] = T_e[\![M[N/x]]\!]$

証明

M の構造に関する帰納法より証明する。

(1) $M = M'\,N'$ のとき $T_e[\![M'\,N']\!][T_e[\![N]\!]/x] = T_e[\![(M'\,N')[N/x]]\!]$ を示す。このとき

$$T_e[\![M']\!][T_e[\![N]\!]/x] = T_e[\![M'[N/x]]\!]$$
$$T_e[\![N']\!][T_e[\![N]\!]/x] = T_e[\![N'[N/x]]\!]$$

が成り立っていると仮定する。

$$\begin{array}{rcl}\text{左辺} & = & (T_f[\![M']\!] \uparrow T_e[\![N']\!])[T_e[\![N]\!]/x] \\ & = & (T_f[\![M']\!][T_e[\![N]\!]/x]) \uparrow (T_e[\![N']\!][T_e[\![N]\!]/x]) \\ & = & T_f[\![M'[N/x]]\!] \uparrow T_e[\![N'[N/x]]\!](\text{仮定より}) \\ & = & T_e[\![(M'[N/x])\,(N'[N/x])]\!] \\ & = & T_e[\![(M'\,N')[N/x]]\!]\end{array}$$

となり、命題を満たす。

(2) $M = V$ の場合。

(i) $V = x'$ の場合。$T_e[\![x']\!][T_e[\![N]\!]/x] = T_e[\![x'[N/x]]\!]$ を (i')(i") に示す。

(i') 左辺は $x' = x$ なので、x' が $T_e[\![N]\!]$ に置き換わり、左辺 $= x'[T_e[\![N]\!]/x] = T_e[\![N]\!]$ となる。一方右辺は、右辺 $= T_e[\![N]\!] =$ 左辺 となるので、命題を満たす。

(i") $x' \neq x$ の場合。左辺は $x' \neq x$ なので、代入は行われず、左辺 $= x'[T_e[\![V]\!]/x] = x'$ となる。一方右辺も 右辺 $= T_e[\![x'[N/x]]\!] = T_e[\![x']\!] = x' =$ 左辺 となり、命題を満たす。

(ii) $V = \lambda x'.\,M$ の場合。$T_e[\![\lambda x'.\,M]\!][T_e[\![N]\!]/x] = T_e[\![(\lambda x'.\,M)[N/x]]\!]$ を (ii')(ii") に示す。$T_e[\![M]\!][T_e[\![N]\!]/x] = T_e[\![M[N/x]]\!]$ を仮定する。

(ii') $x' = x$ の場合。左辺 $= \lceil x' \Rightarrow T_e[\![M]\!]\rceil[T_e[\![N]\!]/x] = \lceil x' \Rightarrow M\rceil$ となる。一方 右辺 $= T_e[\![\lambda x'.\,M]\!] = \lceil x' \Rightarrow M\rceil =$ 左辺 となり、命題を満たす。

(ii") $x' \neq x$ の場合。

$$\begin{array}{rcl}\text{左辺} & = & \lceil x' \Rightarrow M\rceil[T_e[\![N]\!]/x] \\ & = & \lceil x' \Rightarrow T_e[\![M[T_e[\![N]\!]/x]]\!]\rceil \\ & = & \lceil x' \Rightarrow T_e[\![M[N/x]]\!]\rceil(\text{仮定より})\end{array}$$

一方右辺は 右辺 $= T_e[\![\lambda x'.\,M[N/x]]\!] = \lceil x' \Rightarrow T_e[\![M[N/x]]\!]\rceil =$ 左辺 となり、命題を満たす。

(iii) $V' = \mathcal{C}$ の場合。$T_e[\![\mathcal{C}]\!][T_e[\![N]\!]/x] = T_e[\![\mathcal{C}[N/x]]\!]$ を示す。左辺 $= \lceil y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)][T_e[\![N]\!]/x\rceil = y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]$ となる。一方右辺は右辺 $= \lceil y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]\rceil = y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)] =$ 左辺となり、命題を満たす。

(i)〜(iii) より、命題は成り立つ。

(1)(2) より命題は成り立つ。 □

以上より、SLC に Call-by-name $\lambda\mu$ 計算を埋め込むことができる。

A.2　論理関係の定義および基本定理の証明

A.2.1　Call-by-value Right-to-Left SLC における論理関係の定義および基本定理の証明

定義 A.2.1　(1) $R^v_{+\mathsf{int}}(n_1, n_2) \Leftrightarrow n_1 = n_2$

(1') $R^v_{+(\tau_1 \to \tau_2)}(\lceil f_1 \rceil, \lceil f_2 \rceil) \Leftrightarrow R^f_{\{ {+\tau_1 \to +\tau_2 \atop \neg\tau_2 \to \neg\tau_1}}(f_1, f_2)$

(1") $R^v_{+(\tau_1 - \tau_2)}([(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c_1 \downarrow f_y) \uparrow v_1], [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c_2 \downarrow f_y) \uparrow v_2]) \Leftrightarrow$
$\forall R^f_{\{ {+\tau_1 \to +\tau_2 \atop \neg\tau_2 \to \neg\tau_1}}(f_1, f_2). \langle\, c_1 \,|\, f_1 \,|\, v_1 \,\rangle \approx \langle\, c_2 \,|\, f_2 \,|\, v_2 \,\rangle$

(2) $R^e_{+\tau}(e_1, e_2) \Leftrightarrow \forall R^c_{\neg\tau}(c_1, c_2). \langle\, c_1 \,|\, e_1 \,\rangle \approx \langle\, c_2 \,|\, e_2 \,\rangle$

(3) $R^f_{\{ {+\tau_1 \to +\tau_2 \atop \neg\tau_2 \to \neg\tau_1}}(f_1, f_2) \Leftrightarrow \forall R^v_{+\tau_1}(v_1, v_2). R^c_{\neg\tau_2}(c_1, c_2). \langle\, c_1 \,|\, f_1 \,|\, v_1 \,\rangle \approx \langle\, c_2 \,|\, f_2 \,|\, v_2 \,\rangle$

(4) $R^c_{\neg\tau}(c_1, c_2) \Leftrightarrow \forall R^v_{+\tau}(v_1, v_2). \langle\, c_1 \,|\, v_1 \,\rangle \approx \langle\, c_2 \,|\, v_2 \,\rangle$

定理 A.2.2 環境 Γ が $\Gamma = x_i : +\sigma_i, y_j : \neg\tau_j$ であり、さらに $R^v_{+\sigma_i}(v_i, v'_i).R^c_{\neg\tau_j}(c_j, c'_j)$ について $\rho = [v_i/x_i, c_j/y_j], \rho' = [v'_i/x_i, c'_j/y_j]$ であるとする。このとき、以下が成り立つ。

(v) $\Gamma \vdash v : +\sigma \Rightarrow R^v_{+\sigma}(v\rho, v\rho')$

(e) $\Gamma \vdash e : +\sigma \Rightarrow R^e_{+\sigma}(e\rho, e\rho')$

(f) $\Gamma \vdash f : \{ {+\sigma \to +\tau \atop \neg\tau \to \neg\sigma} \Rightarrow R^f_{\{ {+\sigma \to +\tau \atop \neg\tau \to \neg\sigma}}(f\rho, f\rho')$

(c) $\Gamma \vdash c : \neg\tau \Rightarrow R^c_{\neg\tau}(c\rho, c\rho')$

証明

型の導出木に関する帰納法より証明する。

(v) を証明する。

(i)

$$\Gamma, x : +\sigma \vdash x : +\sigma \quad \text{(TVar)}$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (v) について $R^v_{+\sigma}(x\rho, x\rho')$ を示す。
これは環境に関する仮定より $x\rho[v/x] = v$ および $x\rho'[v'/x] = v'$ となり、さらに仮定より $R^v_{+\sigma}(v, v')$ となるので、成り立つ。

(ii)

$$\frac{\Gamma \vdash f : \{{}^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}{\Gamma \vdash \lceil f \rceil : +(\sigma \to \tau)} \text{ (TFunClo)}$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (v) について $R^v_{+(\sigma\to\tau)}(\lceil f \rceil\rho, \lceil f \rceil\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (1') より $\forall R^f_{\{{}^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}(f\rho, f\rho')$ を示せば良い。これは (f) の帰納法の仮定より成り立つ。

(iii)

$$\Gamma \vdash n : +\mathsf{int} \quad \text{(TInt)}$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (v) について $R^v_{+\mathsf{int}}(n\rho, n\rho')$ を示す。
これは $n\rho = n$ および $n\rho' = n$ となり、定義 (1) より $n = n \Leftrightarrow R^v_{+\mathsf{int}}(n, n)$ となるので、成り立つ。

(iv)

$$\frac{\Gamma \vdash c : \neg\tau \quad \Gamma \vdash v : +\sigma}{\Gamma \vdash [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow v] : +(\sigma - \tau)} \text{ (TContext}_{\text{v}}\text{)}$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (v) について $R^v_{+(\sigma-\tau)}([(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow v]\rho, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow v]\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (1") から

$$\forall R^f_{\{{}^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}(f_1, f_2).\langle\, c\rho \,|\, f_1 \,|\, v\rho \,\rangle \approx \langle\, c\rho' \,|\, f_2 \,|\, v\rho' \,\rangle$$

を示せば良い。
$\forall R^f_{\{{}^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}(f_1, f_2)$ から、さらに定義 (3) より

$$\forall R^v_{+\sigma}(v\rho, v\rho'), \forall R^c_{\neg\tau}(c\rho, c\rho')$$

を示せば良く、これは (v)(c) の帰納法の仮定より、成り立つ。

(e) を証明する。

$$\frac{\Gamma \vdash f : \{{}^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma} \quad \Gamma \vdash e : +\sigma}{\Gamma \vdash f \uparrow e : +\tau} \text{ (TApp)}$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (e) について $R^e_{+\sigma}((f \uparrow e)\rho, (f \uparrow e)\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (2) より

$$\forall R^c_{\neg\tau}(c_1, c_2).\langle\, c_1 \,|\, (f \uparrow e)\rho \,\rangle \approx \langle\, c_2 \,|\, (f \uparrow e)\rho' \,\rangle$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{lcl}\langle c_1 \,|\, (f \uparrow e)\rho \rangle & \rightsquigarrow & \langle c_1 \,|\, f\rho \,|\, e\rho \rangle \;\; \approx \;\; \langle c_1 \downarrow f\rho \,|\, e\rho \rangle \\ \langle c_2 \,|\, (f \uparrow e)\rho' \rangle & \rightsquigarrow & \langle c_2 \,|\, f\rho' \,|\, e\rho' \rangle \;\; \approx \;\; \langle c_2 \downarrow f\rho' \,|\, e\rho' \rangle\end{array}$$

となり、これは (e) の帰納法の仮定より

$$\forall R^c_{\neg\sigma}(c_1 \downarrow f\rho, c_2 \downarrow f\rho')$$

を示せば良い。

これは定義 (4) より

$$\forall R^v_{+\sigma}(v_1, v_2).\langle c_1 \downarrow f\rho \,|\, v_1 \rangle \approx \langle c_1 \downarrow f\rho' \,|\, v_2 \rangle$$

を示せばよい。

$$\begin{array}{lcl}\langle c_1 \downarrow f\rho \,|\, v_1 \rangle & \rightsquigarrow & \langle c_1 \,|\, f\rho \,|\, v_1 \rangle \\ \langle c_1 \downarrow f\rho' \,|\, v_2 \rangle & \rightsquigarrow & \langle c_1 \,|\, f\rho' \,|\, v_2 \rangle\end{array}$$

となり、(f) の帰納法の仮定より成り立つ。

(f) を証明する。

(i)

$$\frac{\Gamma \vdash e : +(\sigma \to \tau)}{\Gamma \vdash \overline{e} : \{ {}^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma}} \text{ (TCloFun)}$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (f) について $R^f_{\{ {}^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma}}(\overline{e}\rho, \overline{e}\rho')$ を示す。

これを示すには、定義 (3) より

$$\forall R^v_{+\sigma}(v_1, v_2).\forall R^c_{\neg\tau}(c_1, c_2).\langle c_1 \,|\, \overline{e}\rho \,|\, v_1 \rangle \;\; \approx \;\; \langle c_1 \,|\, \overline{e}\rho' \,|\, v_2 \rangle$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{lcl}\langle c_1 \,|\, \overline{e}\rho \,|\, v_1 \rangle & \rightsquigarrow & \langle [c_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v_1)] \,|\, e\rho \rangle \\ \langle c_2 \,|\, \overline{e}\rho' \,|\, v_2 \rangle & \rightsquigarrow & \langle [c_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v_2)] \,|\, e\rho' \rangle\end{array}$$

となり、これは (e) の帰納法の仮定より

$$\forall R^c_{\neg(\sigma\to\tau)}([c_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v_1)], [c_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v_2)])$$

を示せばよい。

これを示すには、定義 (4) より、

$$\forall R^v_{+(\sigma\to\tau)}(\lceil f_1 \rceil, \lceil f_2 \rceil).\langle [c_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v_1)] \,|\, \lceil f_1 \rceil \rangle \approx \langle [c_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v_2)] \,|\, \lceil f_2 \rceil \rangle$$

を示せばよい。

$$\begin{array}{lcl}\langle [c_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_1)] \,|\, \lceil f_1 \rceil \rangle & \rightsquigarrow & \langle c_1 \,|\, f_1 \,|\, v_1 \rangle \\ \langle [c_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_2)] \,|\, \lceil f_2 \rceil \rangle & \rightsquigarrow & \langle c_2 \,|\, f_2 \,|\, v_2 \rangle\end{array}$$

となり、これは定義 (3) の R^f の関係性より成り立つ。

(ii)

$$\frac{\Gamma, x : +\sigma \vdash e : +\tau}{\Gamma \vdash x \Rightarrow e : \{^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma}} \ (\text{TFun})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (f) について $R^f_{\{^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma}}((x \Rightarrow e)\rho, (x \Rightarrow e)\rho')$ を示す。これを示すには、定義 (3) より

$$\forall R^v_{+\sigma}(v_1, v_2). \forall R^c_{\neg\tau}(c_1, c_2). \langle\, c_1 \,|\, (x \Rightarrow e)\rho \,|\, v_1 \,\rangle \approx \langle\, c_2 \,|\, (x \Rightarrow e)\rho' \,|\, v_2 \,\rangle$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{rcl} \langle\, c_1 \,|\, (x \Rightarrow e)\rho \,|\, v_1 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c_1 \,|\, e\rho[v_1/x] \,\rangle \\ \langle\, c_1 \,|\, (x \Rightarrow e)\rho' \,|\, v_2 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c_2 \,|\, e\rho'[v_2/x] \,\rangle \end{array}$$

となり、(e) の帰納法の仮定より成り立つ。

(iii)

$$\frac{\Gamma, y : \neg\tau \vdash \neg c : \sigma}{\Gamma \vdash y \Leftarrow c : \{^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma}} \ (\overline{\text{TFun}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (f) について $R^f_{\{^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma}}((y \Leftarrow c)\rho, (y \Leftarrow c)\rho')$ を示す。これを示すには、定義 (3) より

$$\forall R^v_{+\sigma}(v_1, v_2). \forall R^c_{\neg\tau}(c_1, c_2). \langle\, c_1 \,|\, (y \Leftarrow c)\rho \,|\, v_1 \,\rangle \approx \langle\, c_2 \,|\, (y \Leftarrow c)\rho' \,|\, v_2 \,\rangle$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{rcl} \langle\, c_1 \,|\, (y \Leftarrow c)\rho \,|\, v_1 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c[c_1/y] \,|\, v_1 \,\rangle \\ \langle\, c_1 \,|\, (y \Leftarrow c)\rho' \,|\, v_2 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c[c_2/y] \,|\, v_2 \,\rangle \end{array}$$

となり、SLC の代入補題と (c) の帰納法の仮定より成り立つ。

(vi)

$$\frac{\Gamma \vdash c : \neg(\sigma - \tau)}{\Gamma \vdash \underline{c} : \{^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma}} \ (\overline{\text{TCloFun}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (f) について $R^f_{\{^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma}}(\underline{c}\rho, \underline{c}\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (3) より

$$\forall R^v_{+\sigma}(v_1, v_2). \forall R^c_{\neg\tau}(c_1, c_2). \langle\, c_1 \,|\, \underline{c}\rho \,|\, v_1 \,\rangle \approx \langle\, c_1 \,|\, \underline{c}\rho' \,|\, v_2 \,\rangle$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{rcl} \langle\, c_1 \,|\, \underline{c}\rho \,|\, v_1 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c\rho \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c_1 \downarrow f_y) \uparrow v_1] \,\rangle \\ \langle\, c_2 \,|\, \underline{c}\rho \,|\, v_2 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c\rho \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c_2 \downarrow f_y) \uparrow v_2] \,\rangle \end{array}$$

となり、これは (c) の帰納法の仮定より

$$\forall R^{v}_{+(\sigma-\tau)}([(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c_1 \downarrow f_y) \uparrow v_1], [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c_2 \downarrow f_y) \uparrow v_2])$$

を示せば良い。

これを示すには、定義 (1”) より

$$\forall R^{f}_{\left\{\substack{+\sigma\to+\tau \\ \neg\tau\to\neg\sigma}\right.}(f_1, f_2).\langle\, c_1 \,|\, f_1 \,|\, v_1 \,\rangle \approx \langle\, c_2 \,|\, f_2 \,|\, v_2 \,\rangle$$

を示せばよく。これは定義 (3) の R^f の関係性より成り立つ。

(c) を証明する。

(i)

$$\Gamma, y : \neg\tau \vdash y : \neg\tau \quad (\overline{\text{TVar}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (c) について $R^{c}_{\neg\tau}(y\rho, y\rho')$ を示す。

これは環境に関する仮定より $y\rho[c/y] = c$ および $y\rho'[c'/y] = c'$ となり、さらに仮定から $R^{c}_{\neg\tau}(c, c')$ となるので、成り立つ。

(ii)

$$\frac{\Gamma \vdash f : \left\{\substack{+\sigma\to+\tau \\ \neg\tau\to\neg\sigma}\right. \quad \Gamma \vdash c : \neg\tau}{\Gamma \vdash c \downarrow f : \neg\sigma} \ (\overline{\text{TApp}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (c) について $R^{c}_{\neg\sigma}((c \downarrow f)\rho, (c \downarrow f)\rho')$ を示す。

これを示すには、定義 (4) より

$$\forall R^{v}_{+\sigma}(v_1, v_2).\langle\, (c \downarrow f)\rho \,|\, v_1 \,\rangle \approx \langle\, (c \downarrow f)\rho' \,|\, v_2 \,\rangle$$

を示せば良い。

$$\langle\, (c \downarrow f)\rho \,|\, v_1 \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c\rho \,|\, f\rho \,|\, v_1 \,\rangle$$
$$\langle\, (c \downarrow f)\rho' \,|\, v_2 \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c\rho' \,|\, f\rho' \,|\, v_2 \,\rangle$$

となり、これは (f) の帰納法の仮定より

$$\forall R^{v}_{+\sigma}(v_1, v_2).\forall R^{c}_{\neg\tau}(c\rho, c\rho')$$

を示せばよく、これは (c) の帰納法の仮定より成り立つ。

(iii)

$$\frac{\Gamma \vdash f : \left\{\substack{+\sigma\to+\tau \\ \neg\tau\to\neg\sigma}\right.}{\Gamma \vdash \lfloor f \rfloor : \neg(\sigma - \tau)} \ (\overline{\text{TFunClo}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (c) について $R^c_{\neg(\sigma-\tau)}(\lfloor f\rfloor\rho, \lfloor f\rfloor\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (4) より

$$\begin{array}{l}\forall R^v_{+(\sigma-\tau)}([(\lfloor f_y\rfloor \Leftarrow c_1 \downarrow f_y) \uparrow v_1], [(\lfloor f_y\rfloor \Leftarrow c_2 \downarrow f_y) \uparrow v_2]).\\ \langle\, \lfloor f\rfloor \,|\, [(\lfloor f_y\rfloor \Leftarrow c_1 \downarrow f_y) \uparrow v_1] \,\rangle \approx \langle\, \lfloor f\rfloor \,|\, [(\lfloor f_y\rfloor \Leftarrow c_2 \downarrow f_y) \uparrow v_2] \,\rangle\end{array}$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{rcl}\langle\, \lfloor f\rfloor\rho \,|\, [(\lfloor f_y\rfloor \Leftarrow c_1 \downarrow f_y) \uparrow v_1] \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c_1 \,|\, f\rho \,|\, v_1 \,\rangle\\ \langle\, \lfloor f\rfloor\rho' \,|\, [(\lfloor f_y\rfloor \Leftarrow c_2 \downarrow f_y) \uparrow v_2] \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c_2 \,|\, f\rho' \,|\, v_2 \,\rangle\end{array}$$

となり、これは (f) の帰納法の仮定より成り立つ。

(iv)

$$\Gamma \vdash \bullet : \neg\mathsf{int} \quad (\overline{\mathrm{TInt}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (c) について $R^c_{\neg\mathsf{int}}(\bullet\rho, \bullet\rho')$ を示す。
これを示すには、定理 (4) より

$$R^v_{+\mathsf{int}}(n_1, n_2).\langle\, \bullet\rho \,|\, n_1 \,\rangle \approx \langle\, \bullet\rho' \,|\, n_2 \,\rangle$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{rcccl}\langle\, \bullet\rho \,|\, n_1 \,\rangle & = & \langle\, \bullet \,|\, v_1 \,\rangle & \rightsquigarrow & n_1\\ \langle\, \bullet\rho' \,|\, n_2 \,\rangle & = & \langle\, \bullet \,|\, v_2 \,\rangle & \rightsquigarrow & n_2\end{array}$$

となり、成り立つ。

(v)

$$\frac{\Gamma \vdash c : \neg\tau \quad \Gamma \vdash v : +\sigma}{\Gamma \vdash [c \downarrow (\lceil f_x\rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)] : \neg(\sigma \to \tau)} \ (\overline{\mathrm{TContext_v}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (c) について $R^c_{\neg(\sigma\to\tau)}([c \downarrow (\lceil f_x\rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)]\rho, [c \downarrow (\lceil f_x\rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)]\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (4) より

$$\forall R^v_{+(\sigma\to\tau)}(\lceil f_1\rceil, \lceil f_2\rceil).\langle\, [c \downarrow (\lceil f_x\rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)]\rho \,|\, \lceil f_1\rceil \,\rangle \approx \langle\, [c \downarrow (\lceil f_x\rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)]\rho' \,|\, \lceil f_2\rceil \,\rangle$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{rcl}\langle\, [c \downarrow (\lceil f_x\rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)]\rho \,|\, \lceil f_1\rceil \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c\rho \,|\, f_1 \,|\, v\rho \,\rangle\\ \langle\, [c \downarrow (\lceil f_x\rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)]\rho' \,|\, \lceil f_2\rceil \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c\rho \,|\, f_2 \,|\, v\rho' \,\rangle\end{array}$$

となり、さらに $\forall R^v_{+(\sigma\to\tau)}(\lfloor f_1\rfloor, \lfloor f_2\rfloor)$ より、$\forall R^f_{\{\substack{+\sigma\to+\tau\\ \neg\tau\to\neg\sigma}}(f_1, f_2)$ が言え、さらにこれより $\forall R^e_{+\sigma}(v\rho, v\rho')$ と $R^c_{\neg\tau}(c\rho, c\rho')$ を示せば良く、これは (v)(c) の帰納法の仮定より成り立つ。

以上より定理は成り立つ。 □

論理関係の基本定理において同等の式であることの証明

定理 A.1.12 の最後の部分の証明

以下のふたつの式が、同じ値に落ちることを証明する。

1. $\langle \bullet \,|\, T_f[\![V]\!] \,|\, \lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil \,\rangle$
2. $\langle \bullet \,|\, T_f[\![V]\!] \,|\, \lceil x \Rightarrow ((y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil \_ \Rightarrow T_e[\![E[x]]\!] \rceil) \rceil \,\rangle$

証明

$T[\![E[\mathcal{C}\,V]]\!]$ を変形して $\langle \bullet \,|\, T_f[\![V]\!] \,|\, \lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil \,\rangle$ を導く際、最初の式は仮定から型がついているので、Preservation の性質と、下に示す 補題 A.2.3 から $\langle \bullet \,|\, T_f[\![V]\!] \,|\, \lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil \,\rangle$ 自身も型がついていることがわかる。したがって $T_f[\![V]\!]$ にも型がついている。

$T_f[\![V]\!]$ の型は、 $\bullet$ が $\neg\mathsf{int}$ 型であり $\lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil$ の型が $+(\tau \to \alpha)$ の形なので、$\{\substack{+(\tau\to\alpha)\to++\mathsf{int} \\ \neg+\mathsf{int}\to\neg(\tau\to\alpha)}$ という形をしているはずである。

型付けをメモ代わりに記す。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \_ : \neg\alpha \vdash T_c[\![E]\!] : \neg\tau}{\Gamma \vdash \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] : \{\substack{+\tau\to+\alpha \\ \neg\alpha\to\neg\tau}}}{\Gamma \vdash \lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil : +(\tau \to \alpha)}$$

したがって、論理関係の基本定理 A.2.2 より $R^f_{\{\substack{+(\tau\to\alpha)\to++\mathsf{int} \\ \neg+\mathsf{int}\to\neg(\tau\to\alpha)}}(T_f[\![V]\!], T_f[\![V]\!])$ が成り立つ。今、$R^c_{\neg\mathsf{int}}(\bullet, \bullet)$ であるので、論理関係の定義 (3) より

$$R^v_{+(\tau\to\alpha)}(\lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil, \lceil x \Rightarrow ((y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lfloor \_ \Rightarrow T_e[\![E[x]]\!] \rfloor) \rceil)$$

が成り立てば、上記のふたつの式は同じ値に落ちることがわかる。

以上を示すため、まず、定義 (1’) より

$$\begin{aligned}
&R^v_{+(\tau\to\alpha)}(\lceil _ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil, \lceil x \Rightarrow ((y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil _ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lfloor _ \Rightarrow T_e[\![E[x]]\!] \rfloor) \rceil) \\
&\Leftrightarrow R^f_{\{\substack{+\tau\to+\alpha \\ \neg\alpha\to\neg\tau}}(_ \Leftarrow T_c[\![E]\!], x \Rightarrow ((y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil _ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil _ \Rightarrow T_e[\![E[x]]\!] \rceil)
\end{aligned}$$

が成り立てば良い。

これを示すには、次に

$$\begin{aligned}
&\forall R^v_{+\tau}(v_1, v_2). \forall R^c_{\neg\alpha}(c_1, c_2). \langle\, c_1 \,|\, _ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \,|\, v_1 \,\rangle \\
&\approx \langle\, c_2 \,|\, x \Rightarrow ((y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil _ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil _ \Rightarrow T_e[\![E[x]]\!] \rceil) \,|\, v_2 \,\rangle
\end{aligned}$$

を示せば良い。

それぞれを与えられた v_1, v_2, c_1, c_2 で簡約を行うと

$$\langle\, c_1 \,|\, \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \,|\, v_1 \,\rangle \;\rightsquigarrow\; \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, v_1 \,\rangle$$

$$\begin{array}{rl} & \langle\, c_2 \,|\, x \Rightarrow ((y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil \_ \Rightarrow T_e[\![E[x]]\!] \rceil) \,|\, v_2 \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle\, c_2 \,|\, (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil \_ \Rightarrow T_e[\![E[v_2]]\!] \rceil \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle\, c_2 \,|\, y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)] \,|\, \lceil \_ \Rightarrow T_e[\![E[v_2]]\!] \rceil \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle\, \bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow c_2 \rceil) \,|\, \lceil \_ \Rightarrow T_e[\![E[v_2]]\!] \rceil \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, \lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow c_2 \rceil \,|\, \lceil \_ \Rightarrow T_e[\![E[v_2]]\!] \rceil \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, (\_ \Rightarrow T_e[\![E[v_2]]\!]) \uparrow \lceil \_ \Leftarrow c_2 \rceil \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, \_ \Rightarrow T_e[\![E[v_2]]\!] \,|\, \lceil \_ \Leftarrow c_2 \rceil \,\rangle \\ \rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![E[v_2]]\!] \,\rangle \\ \approx & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, v_2 \,\rangle \end{array}$$

となる。

以上より命題は成り立つ。 □

補題 A.2.3 $\vdash E[M] : +\mathsf{int}$ なら $\vdash \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \,\rangle : +\mathsf{int}$ である。

証明

(1) $[\,]$ の場合。仮定から $\vdash T[\![M]\!] : +\mathsf{int}$。これより $\vdash \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![M]\!] \,\rangle : +\mathsf{int}$。よって成り立つ。

(2) $E[F]$ の場合。仮定から $\vdash T[\![E[F[M]]]\!] : +\mathsf{int}$。これに帰納法の仮定を使うと $\vdash \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![F[M]]\!] \,\rangle : +\mathsf{int}$ である。よって (TProg1) を使うと、ある型 A について、(a) $\vdash T_c[\![E]\!] : \neg A$, (b) $\vdash T_e[\![F[M]]\!] : +A$ が両方、成り立っているはずである。ここで F について場合分けをする。

(i) $F = M'\,[\,]$ の場合。$T_e[\![F[M]]\!] = T_e[\![M'\,M]\!] = T_f[\![M']\!] \uparrow T_e[\![M]\!]$。これを (b) に代入すると、ある型 B について

$$\frac{\vdash T_f[\![M']\!] : \{{}^{+B \to +A}_{\neg A \to \neg B} \quad \vdash T_e[\![M]\!] : +B}{\vdash T_f[\![M']\!] \uparrow T_e[\![M]\!] : +A}\ \text{(TApp)}$$

となっていたはずである。この推論の左側の子供と (a) を使うと

$$\frac{\vdash T_f[\![M']\!] : \{{}^{+B \to +A}_{\neg A \to \neg B} \quad \vdash T_c[\![E]\!] : \neg A}{\vdash T_c[\![E]\!] \downarrow T_f[\![M']\!] : \neg B}\ \overline{\text{(TApp)}}$$

が得られる。$T_c[\![E]\!] \downarrow T_f[\![M']\!] = T_c[\![E[M'\,[\,]]]\!] = T_c[\![E[F]]\!]$ であるので、$\vdash T_c[\![E[F]]\!] : \neg B$ となり、これと上の (TApp) の推論の右側の子供から $\vdash \langle\, T_c[\![E[F]]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \,\rangle : +\mathsf{int}$ を得る。

(ii) $F = [\,]\,V$ の場合。$T_e[\![F[M]]\!] = T_e[\![M\,V]\!] = T_f[\![M]\!] \uparrow T_e[\![V]\!]$。これを (b) に代入すると、ある型 B について

$$\frac{\vdash T_f[\![M]\!] : \{^{+B\to+A}_{\neg A\to\neg B} \quad \vdash T_e[\![V]\!] : +B}{\vdash T_f[\![M]\!] \uparrow T_e[\![V]\!] : +A}\ (\mathrm{TApp})$$

となっていたはずである。(a) とこの推論の右側の子供を使うと

$$\frac{\vdash T_c[\![E]\!] : \neg A \quad \vdash T_e[\![V]\!] : +B}{\vdash [T_c[\![E]\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![V]\!])] : \neg(B \to A)}\ (\overline{\mathrm{TCon_v}})$$

が得られる。$[T_c[\![E]\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![V]\!])] = T_c[\![E[[]\,V]]\!] = T_c[\![E[F]]\!]$ であるので、$\vdash T_c[\![E[F]]\!] : \neg(B \to A)$ となる。一方、上の (TApp) の推論の左側の子供 $\vdash T_f[\![M]\!] : \{^{+B\to+A}_{\neg A\to\neg B}$ から $\vdash T_e[\![M]\!] : +(B \to A)$ であることが M に関する場合分けからわかる。したがって $\vdash \langle T_c[\![E[F]]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \rangle : +\mathsf{int}$ を得る。

以上より命題は成り立つ。 □

A.2.2 Call-by-value Left-to-right SLC における論理関係の定義および基本定理の証明

定義 A.2.4 (1) $R^v_{+\mathsf{int}}(n_1, n_2) \Leftrightarrow n_1 = n_2$

(1') $R^v_{+(\tau_1\to\tau_2)}(\lceil f_1\rceil, \lceil f_2\rceil) \Leftrightarrow R^f_{\{{}^{+\tau_1\to+\tau_2}_{\neg\tau_2\to\neg\tau_1}}(f_1, f_2)$

(1") $R^v_{+(\tau_1-\tau_2)}([(\lfloor f_y\rfloor \Leftarrow c_1 \downarrow f_y) \uparrow e_1], [(\lfloor f_y\rfloor \Leftarrow c_2 \downarrow f_y) \uparrow e_2]) \Leftrightarrow$
$\forall R^f_{\{{}^{+\tau_1\to+\tau_2}_{\neg\tau_2\to\neg\tau_1}}(f_1, f_2).\langle\, c_1 \,|\, f_1 \,|\, e_1\,\rangle \approx \langle\, c_2 \,|\, f_2 \,|\, e_2\,\rangle$

(2) $R^e_{+\tau}(e_1, e_2) \Leftrightarrow \forall R^c_{\neg\tau}(c_1, c_2).\langle\, c_1 \,|\, e_1\,\rangle \approx \langle\, c_2 \,|\, e_2\,\rangle$

(3) $R^f_{\{{}^{+\tau_1\to+\tau_2}_{\neg\tau_2\to\neg\tau_1}}(f_1, f_2) \Leftrightarrow \forall R^e_{+\tau_1}(e_1, e_2).R^c_{\neg\tau_2}(c_1, c_2).\langle\, c_1 \,|\, f_1 \,|\, e_1\,\rangle \approx \langle\, c_2 \,|\, f_2 \,|\, e_2\,\rangle$

(4) $R^c_{\neg\tau}(c_1, c_2) \Leftrightarrow \forall R^v_{+\tau}(v_1, v_2).\langle\, c_1 \,|\, v_1\,\rangle \approx \langle\, c_2 \,|\, v_2\,\rangle$

定理 A.2.5 環境 Γ が $\Gamma = x_i : +\sigma_i, y_j : \neg\tau_j$ であり、さらに $\forall R^v_{+\sigma_i}(v_i, v'_i).\forall R^c_{\neg\tau_j}(c_j, c'_j)$ について $\rho = [v_i/x_i, c_j/y_j], \rho' = [v'_i/x_i, c'_j/y_j]$ であるとする。このとき、以下が成り立つ。

(v) $\Gamma \vdash v : +\sigma \Rightarrow R^v_{+\sigma}(v\rho, v\rho')$

(e) $\Gamma \vdash e : +\sigma \Rightarrow R^e_{+\sigma}(e\rho, e\rho')$

(f) $\Gamma \vdash f : \{{}^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma} \Rightarrow R^f_{\{{}^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}(f\rho, f\rho')$

(c) $\Gamma \vdash c : \neg\tau \Rightarrow R^c_{\neg\tau}(c\rho, c\rho')$

証明

型の導出木に関する帰納法より証明する。

(v) を証明する。

(i)

$$\Gamma, x : +T_1 \vdash x : +T_1 \quad (\mathrm{TVar})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (v) について $R^v_{+\sigma}(x\rho, x\rho')$ を示す。
これは環境に関する仮定より $x\rho[v/x] = v$ および $x\rho'[v'/x] = v'$ となり、さらに仮定より $R^v_{+\sigma}(v, v')$ となるので、成り立つ。

(ii)

$$\frac{\Gamma \vdash f : \{{}^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}{\Gamma \vdash \lceil f\rceil : +(\sigma\to\tau)} \ (\mathrm{TFunClo})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (v) について $R^v_{+(\sigma\to\tau)}(\lceil f\rceil\rho, \lceil f\rceil\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (1') より $\forall R^f_{\{{}^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}(f\rho, f\rho')$ を示せば良い。これは (f) の帰納法の仮定より成り立つ。

(iii)

$$\Gamma \vdash n : +\mathsf{int} \quad \text{(TInt)}$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (v) より $R^v_{+\mathsf{int}}(n\rho, n\rho')$ を示す。

これは $n\rho = n$ および $n\rho' = n$ となり、定義 (1) より $n = n \Leftrightarrow R^v_{+\mathsf{int}}(n, n)$ なので、成り立つ。

(iv)

$$\frac{\Gamma \vdash c : \neg\tau \quad \Gamma \vdash e : +\sigma}{\Gamma \vdash [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow e] : +(\sigma - \tau)} \text{ (TContext}'_{\mathrm{v}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (v) について $R^v_{+(\sigma-\tau)}([(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow e]\rho, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c \downarrow f_y) \uparrow e]\rho')$ を示せば良い。

これを示すには、定義 (1") から

$$\forall R^f_{\{ {}^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma}}(f_1, f_2).\langle\, c\rho \,|\, f_1 \,|\, e\rho \,\rangle \approx \langle\, c\rho' \,|\, f_2 \,|\, e\rho' \,\rangle$$

を示せば良い。

$\forall R^f_{\{ {}^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma}}(f_1, f_2)$ から、さらに定義 (3) より

$$\forall R^e_{+\sigma}(e\rho, e\rho'), \forall R^c_{\neg\tau}(c\rho, c\rho')$$

を示せば良く、これは (e)(c) の帰納法より成り立つ。

(e) を証明する。

$$\frac{\Gamma \vdash f : \{ {}^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma} \quad \Gamma \vdash e : +\sigma}{\Gamma \vdash f \uparrow e : +\tau} \text{ (TApp)}$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (e) について $R^e_{+\tau}((f \uparrow e)\rho, (f \uparrow e)\rho')$ を示す。

これを示すには、定義 (2) より $\forall R^c_{\neg\tau}(c_1, c_2).\langle\, c_1 \,|\, (f \uparrow e)\rho \,\rangle \approx \langle\, c_2 \,|\, (f \uparrow e)\rho' \,\rangle$ を示せば良い。

$\langle\, c_1 \,|\, (f \uparrow e)\rho \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c_1 \,|\, f\rho \,|\, e\rho \,\rangle$
$\langle\, c_2 \,|\, (f \uparrow e)\rho' \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c_2 \,|\, f\rho' \,|\, e\rho' \,\rangle$
となり、これは (f) の帰納法の仮定よりさらに $\forall R^e_{+\sigma}(e\rho, e\rho').\forall R^c_{\neg\tau}(c_1, c_2)$ を示せば良い。これは (e) の帰納法の仮定より成り立つ。

(f) を証明する。

(i)

$$\frac{\Gamma \vdash e : +(\sigma \to \tau)}{\Gamma \vdash \overline{e} : \{ {}^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma}} \text{ (TCloFun)}$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (f) について $R^f_{\{^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}(\overline{e}\rho, \overline{e}\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (3) より

$$\forall R^e_{+\sigma}(e_1, e_2).\forall R^c_{\neg\tau}(c_1, c_2).\langle\, c_1 \,|\, \overline{e}\rho \,|\, e_1 \,\rangle \approx \langle\, c_1 \,|\, \overline{e}\rho' \,|\, e_2 \,\rangle$$

を示せば良い。
$\langle\, c_1 \,|\, \overline{e}\rho \,|\, e_1 \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [c_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_1)] \,|\, e\rho \,\rangle$
$\langle\, c_2 \,|\, \overline{e}\rho' \,|\, e_2 \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, [c_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_2)] \,|\, e\rho' \,\rangle$
となり、これは (e) の帰納法の仮定より $\forall R^c_{\neg(\sigma\to\tau)}([c_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_1)], [c_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_2)])$ を示せばよい。
これを示すには定義 (4) より、

$$\begin{aligned}&\forall R^v_{+(\sigma\to\tau)}(\lceil f_1 \rceil, \lceil f_2 \rceil).\\&\langle\, [c_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_1)] \,|\, \lceil f_1 \rceil \,\rangle \approx \langle\, [c_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_2)] \,|\, \lceil f_2 \rceil \,\rangle\end{aligned}$$

を示せばよい。$\langle\, [c_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_1)] \,|\, \lceil f_1 \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c_1 \,|\, f_1 \,|\, e_1 \,\rangle$
$\langle\, [c_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_2)] \,|\, \lceil f_2 \rceil \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c_2 \,|\, f_2 \,|\, e_2 \,\rangle$
となり、これは定義 (3) の R^f の関係性より成り立つ。

(ii)

$$\frac{\Gamma, x : +\sigma \vdash e : +\tau}{\Gamma \vdash x \Rightarrow e : \{^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}} \ (\mathrm{TFun})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (f) について $R^f_{\{^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}((x \Rightarrow e)\rho, (x \Rightarrow e)\rho')$ を示す。
これを示すには、定義(3) より $\forall R^e_{+\sigma}(e_1, e_2).\forall R^c_{\neg\tau}(c_1, c_2).\langle\, c_1 \,|\, (x \Rightarrow e)\rho \,|\, e_1 \,\rangle \approx \langle\, c_2 \,|\, (x \Rightarrow e)\rho' \,|\, e_2 \,\rangle$ を示せば良い。

$\langle\, c_1 \,|\, (x \Rightarrow e)\rho \,|\, e_1 \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c_1 \downarrow (x \Rightarrow e)\rho \,|\, e_1 \,\rangle$
$\langle\, c_2 \,|\, (x \Rightarrow e)\rho' \,|\, e_2 \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, c_2 \downarrow (x \Rightarrow e)\rho' \,|\, e_2 \,\rangle$
となり、さらに $\forall R^e_{+\sigma}(e_1, e_2)$ から、定義 (2) より
$\forall R^c_{\neg\sigma}(c_1 \downarrow (x \Rightarrow e)\rho, c_2 \downarrow (x \Rightarrow e)\rho')$
を示せば良い。
これを示すには、定義 (4) より
$\forall R^v_{+\sigma}(v_1, v_2).\langle\, c_1 \downarrow (x \Rightarrow e)\rho \,|\, v_1 \,\rangle \approx \langle\, c_1 \downarrow (x \Rightarrow e)\rho' \,|\, v_2 \,\rangle$ を示せば良い。

$$\begin{array}{lcccl}\langle\, c_1 \downarrow (x \Rightarrow e)\rho \,|\, v_1 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c_1 \,|\, (x \Rightarrow e)\rho \,|\, v_1 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c_1 \,|\, e\rho[v_1/x] \,\rangle\\ \langle\, c_1 \downarrow (x \Rightarrow e)\rho' \,|\, v_2 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c_1 \,|\, (x \Rightarrow e)\rho' \,|\, v_2 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c_2 \,|\, e\rho'[v_2/x] \,\rangle\end{array}$$

となり、(e) の帰納法の仮定より成り立つ。

(iii)

$$\frac{\Gamma, y : \neg\tau \vdash \neg c : \sigma}{\Gamma \vdash y \Leftarrow c : \{^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}} \ (\overline{\mathrm{TFun}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (f) について $R^f_{\{ {}^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}((y \Leftarrow c)\rho, (y \Leftarrow c)\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (3) より

$$\forall R^e_{+\sigma}(e_1, e_2).\forall R^c_{\neg\tau}(c_1, c_2).\langle\, c_1 \,|\, (y \Leftarrow c)\rho \,|\, e_1 \,\rangle \approx \langle\, c_2 \,|\, (y \Leftarrow c)\rho' \,|\, e_2 \,\rangle$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{rcl} \langle\, c_1 \,|\, (y \Leftarrow c)\rho \,|\, e_1 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c_1 \downarrow (y \Leftarrow c)\rho \,|\, e_1 \,\rangle \\ \langle\, c_2 \,|\, (y \Leftarrow c)\rho' \,|\, e_2 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c_2 \downarrow (y \Leftarrow c)\rho' \,|\, e_2 \,\rangle \end{array}$$

となり、さらに $\forall R^e_{+\sigma}(e_1, e_2)$ から定義 (2) より

$$\forall R^c_{\neg\sigma}(c_1 \downarrow (y \Leftarrow c)\rho, c_2 \downarrow (y \Leftarrow c)\rho')$$

を示せば良い。
これを示すには、定義 (4) より、

$$\forall R^v_{+\sigma}(v_1, v_2).\langle\, c_1 \downarrow (y \Leftarrow c)\rho \,|\, v_1 \,\rangle \approx \langle\, c_2 \downarrow (y \Leftarrow c)\rho' \,|\, v_2 \,\rangle$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{rcccl} \langle\, c_1 \downarrow (y \Leftarrow c)\rho \,|\, v_1 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c_1 \,|\, (y \Leftarrow c)\rho \,|\, v_1 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c\rho[c_1/y] \,|\, v_1 \,\rangle \\ \langle\, c_2 \downarrow (y \Leftarrow c)\rho' \,|\, v_2 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c_1 \,|\, (y \Leftarrow c)\rho \,|\, v_1 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c\rho'[c_2/y] \,|\, v_2 \,\rangle \end{array}$$

となり、(c) の帰納法の仮定より成り立つ。

(vi)

$$\frac{\Gamma \vdash c : \neg(\sigma - \tau)}{\Gamma \vdash \underline{c} : \{ {}^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}\ (\overline{\text{TCloFun}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (f) について $R^f_{\{ {}^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}(\underline{c}\rho, \underline{c}\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (3) より

$$\forall R^e_{+\sigma}(e_1, e_2).\forall R^c_{\neg\tau}(c_1, c_2).\langle\, c_1 \,|\, \underline{c}\rho \,|\, e_1 \,\rangle \approx \langle\, c_1 \,|\, \underline{c}\rho' \,|\, e_2 \,\rangle$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{rcl} \langle\, c_1 \,|\, \underline{c}\rho \,|\, e_1 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c\rho \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c_1 \downarrow f_y) \uparrow e_1] \,\rangle \\ \langle\, c_2 \,|\, \underline{c}\rho \,|\, e_2 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c\rho \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c_2 \downarrow f_y) \uparrow e_2] \,\rangle \end{array}$$

となり、これは (c) の帰納法の仮定より

$$\forall R^v_{+(\sigma-\tau)}([(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c_1 \downarrow f_y) \uparrow e_1], [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c_2 \downarrow f_y) \uparrow e_2])$$

を示せば良い。
これを示すには、定義 (1”) より

$$\forall R^f_{\{ {}^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}(f_1, f_2).\langle\, c_1 \,|\, f_1 \,|\, e_1 \,\rangle \approx \langle\, c_2 \,|\, f_2 \,|\, e_2 \,\rangle$$

を示せばよく。これは定義 (3) の R^f の関係性より成り立つ。

(c) を証明する。

(i)

$$\Gamma, y : \neg\tau \vdash y : \neg\tau \quad (\overline{\mathrm{TVar}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (c) について $R^c_{\neg\tau}(y\rho, y\rho')$ を示す。

これは環境に関する仮定より $y\rho[c/y] = c$ および $y\rho'[c'/y] = c'$ となり、さらに仮定から $R^c_{\neg\tau}(c, c')$ となるので、成り立つ。

(ii)

$$\frac{\Gamma \vdash f : \{^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma} \quad \Gamma \vdash c : \neg\tau}{\Gamma \vdash c \downarrow f : \neg\sigma} \ (\overline{\mathrm{TApp}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (c) について $R^c_{\neg\sigma}((c \downarrow f)\rho, (c \downarrow f)\rho')$ を示す。

これを示すには、定義 (4) より

$$\forall R^v_{+\sigma}(v_1, v_2).\langle\, (c \downarrow f)\rho \,|\, v_1 \,\rangle \approx \langle\, (c \downarrow f)\rho' \,|\, v_2 \,\rangle$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{lcl}\langle\, (c \downarrow f)\rho \,|\, v_1 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c\rho \,|\, f\rho \,|\, v_1 \,\rangle \\ \langle\, (c \downarrow f)\rho' \,|\, v_2 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c\rho' \,|\, f\rho' \,|\, v_2 \,\rangle\end{array}$$

となり、これは (f) の帰納法の仮定より

$$\forall R^v_{+\sigma}(v_1, v_2)\ \text{ならば}\ \forall R^e_{+\sigma}(v_1, v_2).\forall R^c_{\neg\tau}(c\rho, c\rho')$$

を示せばよい。

まず $\forall R^e_{+\sigma}(v_1, v_2)$ となるには、$\forall R^c_{\neg\sigma}(c'_1, c'_2).\langle\, c'_1 \,|\, v_1 \,\rangle \approx \langle\, c'_2 \,|\, v_2 \,\rangle$ を示す。$R^v_{+\sigma} v_1 v_2$ が成り立っているので、$\forall R^e_{+\sigma}(v_1, v_2)$ は成り立つ。そして $\forall R^c_{\neg\tau}(c\rho, c\rho')$ は (c) の帰納法の仮定より成り立つ。

(iii)

$$\frac{\Gamma \vdash f : \{^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}{\Gamma \vdash \lfloor f \rfloor : \neg(\sigma - \tau)} \ (\overline{\mathrm{TFunClo}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (c) について $R^c_{\neg(\sigma-\tau)}(\lfloor f \rfloor\rho, \lfloor f \rfloor\rho')$ を示す。

これを示すには、定義 (4) より

$$\begin{array}{l}\forall R^v_{+(\sigma-\tau)}([(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c_1 \downarrow f_y) \uparrow e_1], [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c_2 \downarrow f_y) \uparrow e_2]). \\ \langle\, \lfloor f \rfloor \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c_1 \downarrow f_y) \uparrow e_1] \,\rangle \approx \langle\, \lfloor f \rfloor \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c_2 \downarrow f_y) \uparrow e_2] \,\rangle\end{array}$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{lcl}\langle\, \lfloor f \rfloor\rho \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c_1 \downarrow f_y) \uparrow e_1] \rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c_1 \,|\, f\rho \,|\, e_1 \,\rangle \\ \langle\, \lfloor f \rfloor\rho' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow c_2 \downarrow f_y) \uparrow e_2] \rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c_2 \,|\, f\rho' \,|\, e_2 \,\rangle\end{array}$$

となり、これは (f) の帰納法の仮定より成り立つ。

(iv)

$$\Gamma \vdash \bullet : \neg\mathsf{int} \quad (\overline{\mathrm{TInt}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (c) について $R^c_{\neg\mathsf{int}}(\bullet\rho, \bullet\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (4) より

$$R^v_{+\mathsf{int}}(n_1, n_2).\langle\, \bullet\rho \,|\, n_1 \,\rangle \approx \langle\, \bullet\rho' \,|\, n_2 \,\rangle$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{rcccl} \langle\, \bullet\rho \,|\, n_1 \,\rangle & = & \langle\, \bullet \,|\, n_1 \,\rangle & \rightsquigarrow & v_1 \\ \langle\, \bullet\rho' \,|\, n_2 \,\rangle & = & \langle\, \bullet \,|\, n_2 \,\rangle & \rightsquigarrow & n_2 \end{array}$$

となり、成り立つ。

(v)

$$\frac{\Gamma \vdash c : \neg\tau \quad \Gamma \vdash e : +\sigma}{\Gamma \vdash [c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)] : \neg(\sigma \to \tau)} \ (\overline{\mathrm{TContext}'_{\mathrm{v}}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (c) について $R^c_{\neg(\sigma\to\tau)}([c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)]\rho, [c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow v)]\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (4) より

$$\forall R^v_{+(\sigma\to\tau)}(\lceil f_1 \rceil, \lceil f_2 \rceil).\langle\, [c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)]\rho \,|\, \lceil f_1 \rceil \,\rangle \approx \langle\, [c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)]\rho' \,|\, \lceil f_2 \rceil \,\rangle$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{rcl} \langle\, [c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)]\rho \,|\, \lceil f_1 \rceil \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c\rho \,|\, f_1 \,|\, e\rho \,\rangle \\ \langle\, [c \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)]\rho' \,|\, \lceil f_2 \rceil \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c\rho \,|\, f_2 \,|\, e\rho' \,\rangle \end{array}$$

となり、さらに $\forall R^v_{+(\sigma\to\tau)}(\lfloor f_1 \rfloor, \lfloor f_2 \rfloor)$ より、$\forall R^f_{\{ {+\sigma\to+\tau \atop \neg\tau\to\neg\sigma}}(f_1, f_2)$ が言え、さらにこれより

$$\forall R^e_{+\sigma}(e\rho, e\rho').R^c_{\neg\tau}(c\rho, c\rho')$$

を示せば良い。これは (e)(c) の帰納法の仮定より成り立つ。

以上より定理は成り立つ。 □

論理関係の基本定理において同等の式であることの証明

定理 A.1.16 の最後の部分の証明

以下のふたつの式が、同じ値に落ちることを証明する。

1. $\langle\, \bullet \,|\, T_f[\![V]\!] \,|\, \lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \rceil \,\rangle$
2. $\langle\, \bullet \,|\, T_f[\![V]\!] \,|\, \lceil x \Rightarrow ((y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil \_ \Rightarrow T_e[\![E[x]]\!] \rceil) \rceil \,\rangle$

証明

$T\llbracket E[\mathcal{C}\,V]\rrbracket$ を変形して $\langle \bullet \,|\, T_f\llbracket V\rrbracket \,|\, \lceil \_ \Leftarrow T_c\llbracket E\rrbracket\rceil \,\rangle$ を導く際、最初の式は仮定から型がついているので、Preservation の性質と、下に示す補題 補題 A.2.6 から $\langle \bullet \,|\, T_f\llbracket V\rrbracket \,|\, \lceil \_ \Leftarrow T_c\llbracket E\rrbracket\rceil \,\rangle$ 自身も型がついていることがわかる。したがって $T_f\llbracket V\rrbracket$ にも型がついている。

$T_f\llbracket V\rrbracket$ の型は、$\bullet$ が $\neg\mathsf{int}$ 型であり $\lceil \_ \Leftarrow T_c\llbracket E\rrbracket\rceil$ の型が $+(\tau \to \alpha)$ の形なので、$\{^{+(\tau\to\alpha)\to+\mathsf{int}}_{\neg\mathsf{int}\to\neg(\tau\to\alpha)}$ という形をしているはずである。

型付けをメモ代わりに記す。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \_ : \neg\alpha \vdash T_c\llbracket E\rrbracket : \neg\tau}{\Gamma \vdash \_ \Leftarrow T_c\llbracket E\rrbracket : \{^{+\tau\to+\alpha}_{\neg\alpha\to\neg\tau}}}{\Gamma \vdash \lceil \_ \Leftarrow T_c\llbracket E\rrbracket\rceil : +(\tau \to \alpha)}$$

ここで right-to-left の場合と同じように議論を進めたいのだが、right-to-left の場合とは違い、項部分は関数部分より後に実行されるため、論理関係の定義 (3) で、項は R^v ではなく R^e で関係づいている。R^v を使用するようにするために、上のふたつの式を (pop_{v}) を逆に使って

1. $\langle \bullet \downarrow T_f\llbracket V\rrbracket \,|\, \lceil \_ \Leftarrow T_c\llbracket E\rrbracket\rceil \,\rangle$
2. $\langle \bullet \downarrow T_f\llbracket V\rrbracket \,|\, \lceil x \Rightarrow ((y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x\rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y\rceil)]) \uparrow \lceil \_ \Rightarrow T_e\llbracket E[x]\rrbracket\rceil)\rceil \,\rangle$

のように変形する。これらの式が同じ値に落ちれば、もとの式も同じ値に落ちる。

$\bullet \downarrow T_f\llbracket V\rrbracket$ は $\neg(\tau \to \alpha)$ 型なので、論理関係の基本定理 A.2.5 より $R^c_{\neg(\tau\to\alpha)}(\bullet \downarrow T_f\llbracket V\rrbracket, \bullet \downarrow T_f\llbracket V\rrbracket)$ が成り立つ。よって論理関係の定義 (4) より

$$R^v_{+(\tau\to\alpha)}(\lceil \_ \Leftarrow T_c\llbracket E\rrbracket\rceil, \lceil x \Rightarrow ((y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x\rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y\rceil)]) \uparrow \lfloor \_ \Rightarrow T_e\llbracket E[x]\rrbracket\rfloor)\rceil)$$

が成り立てば、上記のふたつの式は同じ値に落ちることがわかる。

以上を示すためにまず、定義 (1') より

$$\begin{aligned} &R^v_{+(\tau\to\alpha)}(\lceil \_ \Leftarrow T_c\llbracket E\rrbracket\rceil, \lceil x \Rightarrow ((y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x\rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y\rceil)]) \uparrow \lceil \_ \Rightarrow T_e\llbracket E[x]\rrbracket\rceil)\rceil) \\ &\Leftrightarrow R^f_{\{^{+\tau\to+\alpha}_{\neg\alpha\to\neg\tau}}(\_ \Leftarrow T_c\llbracket E\rrbracket, x \Rightarrow ((y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x\rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y\rceil)]) \uparrow \lceil \_ \Rightarrow T_e\llbracket E[x]\rrbracket\rceil) \end{aligned}$$

が成り立てば良い。

これを示すには、次に

$$\begin{aligned} &\forall R^v_{+\tau}(v_1, v_2).\forall R^c_{\neg\alpha}(c_1, c_2).\langle c_1 \,|\, \_ \Leftarrow T_c\llbracket E\rrbracket \,|\, v_1 \,\rangle \\ &\approx \langle c_2 \,|\, x \Rightarrow ((y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x\rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y\rceil)]) \uparrow \lceil \_ \Rightarrow T_e\llbracket E[x]\rrbracket\rceil) \,|\, v_2 \,\rangle \end{aligned}$$

を示せば良い。

それぞれを与えられた v_1, v_2, c_1, c_2 で簡約を行うと

$$\langle\, c_1 \,|\, \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \,|\, v_1 \,\rangle \rightsquigarrow \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, v_1 \,\rangle$$

$$\begin{array}{cl}
& \langle\, c_2 \,|\, x \Rightarrow ((y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil _ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow (\lceil _ \Rightarrow T_e[\![E[x]]\!] \rceil)) \,|\, v_2 \,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, c_2 \,|\, (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil _ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil _ \Rightarrow T_e[\![E[v_2]]\!] \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, c_2 \,|\, y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil _ \Leftarrow y \rceil)] \,|\, \lceil _ \Rightarrow T_e[\![E[v_2]]\!] \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil _ \Leftarrow c_2 \rceil) \,|\, \lceil _ \Rightarrow T_e[\![E[v_2]]\!] \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, \lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil _ \Leftarrow c_2 \rceil \,|\, \lceil _ \Rightarrow T_e[\![E[v_2]]\!] \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, (_ \Rightarrow T_e[\![E[v_2]]\!]) \uparrow \lceil _ \Leftarrow c_2 \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, _ \Rightarrow T_e[\![E[v_2]]\!] \,|\, \lceil _ \Leftarrow c_2 \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow & \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![E[v_2]]\!] \,\rangle \\
\approx & \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, v_2 \,\rangle
\end{array}$$

となる。

以上より、命題は成り立つ。 □

補題 A.2.6 $\vdash T[\![E[M]]\!] : +\mathsf{int}$ なら $\vdash \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \,\rangle : +\mathsf{int}$ である。

証明

E の構造に関する帰納法。Right-to-left の場合と（$(\overline{\mathrm{TCon_v}})$ の規則に現れる v が e になるのを除けば）全く同じである。 □

A.2.3　Call-by-name SLC における論理関係の定義および基本定理の証明

定義 A.2.7　(1) $R^e_{+\tau}(e_1, e_2) \Leftrightarrow \forall R^k_{\neg\tau}(k_1, k_2).\langle\, k_1 \,|\, e_1 \,\rangle \approx \langle\, k_2 \,|\, e_2 \,\rangle$

(2) $R^f_{\{{}^{+\tau_1 \to +\tau_2}_{\neg\tau_2 \to \neg\tau_1}}(f_1, f_2) \Leftrightarrow \forall R^e_{+\tau_1}(e_1, e_2).R^k_{\neg\tau_2}(k_1, k_2).\langle\, k_1 \,|\, f_1 \,|\, e_1 \,\rangle \approx \langle\, k_1 \,|\, f_1 \,|\, e_1 \,\rangle$

(3) $R^c_{\neg\tau}(c_1, c_2) \Leftrightarrow \forall R^e_{+\tau}(e_1, e_2).\langle\, c_1 \,|\, e_1 \,\rangle \approx \langle\, c_2 \,|\, e_2 \,\rangle$

(4) $R^k_{\neg \mathsf{int}}(\bullet, \bullet)$

(4') $R^k_{\neg(\tau_1 - \tau_2)}(\lfloor f_1 \rfloor, \lfloor f_2 \rfloor) \Leftrightarrow R^f_{\{{}^{+\tau_1 \to +\tau_2}_{\neg\tau_2 \to \neg\tau_1}}(f_1, f_2)$

(4") $R^k_{\neg(\tau_1 \to \tau_2)}([k_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_1)], [k_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_2)]) \Leftrightarrow R^f_{\{{}^{+\tau_1 \to +\tau_2}_{\neg\tau_2 \to \neg\tau_1}}.\langle\, k_1 \,|\, f_1 \,|\, e_1 \,\rangle \approx \langle\, k_2 \,|\, f_2 \,|\, e_2 \,\rangle$

定理 A.2.8 環境 Γ が $\Gamma = x_i : +\sigma_i, y_j : \neg\tau_j$ であり、さらに $\forall R^e_{+\sigma_i}(e_i, e'_i).\forall R^k_{\neg\tau_j}(k_j, k'_j)$ について $\rho = [e_i/x_i, k_j/y_j], \rho' = [e'_i/x_i, k'_j/y_j]$ であるとする。ことのき、以下が成り立つ。

(e) $\Gamma \vdash e : +\sigma \Rightarrow R^e_{+\sigma}(e\rho, e\rho')$

(f) $\Gamma \vdash f : \{{}^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma} \Rightarrow R^f_{\{{}^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma}}(f\rho, f\rho')$

(c) $\Gamma \vdash c : \neg\tau \Rightarrow R^c_{\neg\tau}(c\rho, c\rho')$

(k) $\Gamma \vdash k : \neg\tau \Rightarrow R^k_{\neg\tau}(k\rho, k\rho')$

証明

(e) を証明する。

(i)

$$\Gamma, x : +\sigma \vdash x : +\sigma \quad \text{(TVar)}$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (e) について $R^e_{+\tau}(x\rho, x\rho')$ を示す。
これは環境に関する仮定より $x\rho[e/x] = e$ および $x\rho'[e'/x] = e'$ となり、さらに仮定から $R^e_{+\sigma}(e, e')$ となるので、成り立つ。

(ii)

$$\frac{\Gamma \vdash f : \{{}^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma} \quad \Gamma \vdash e : +\sigma}{\Gamma \vdash f \uparrow e : +\tau} \text{(TApp)}$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (e) について $R^e_{+\tau}((f \uparrow e)\rho, (f \uparrow e)\rho')$ を示す。

これを示すには、定義 (4) より

$$\forall R^{k}_{\neg\tau}(k_1, k_2).\langle\, k_1 \,|\, (f \uparrow e)\rho \,\rangle \approx \langle\, k_2 \,|\, (f \uparrow e)\rho' \,\rangle$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{rcl}\langle\, k_1 \,|\, (f \uparrow e)\rho \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, k_1 \,|\, f\rho \,|\, e\rho \,\rangle \\ \langle\, k_2 \,|\, (f \uparrow e)\rho' \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, k_2 \,|\, f\rho' \,|\, e\rho' \,\rangle\end{array}$$

となり、これは (f) の帰納法の仮定よりさらに

$$\forall R^{e}_{+\sigma}(e\rho, e\rho').\forall R^{k}_{\neg\tau}(k_1, k_2)$$

を示せば良い。これは (e) の帰納法の仮定より成り立つ。

(iii)

$$\frac{\Gamma \vdash f : \{ {}^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma}}{\Gamma \vdash \lceil f \rceil : +(\sigma \to \tau)}\ (\text{TFunClo})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (e) について $R^{e}_{+(\sigma\to\tau)}(\lceil f \rceil\rho, \lceil f \rceil\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (1) より

$$\begin{array}{l}\forall R^{k}_{\neg(\sigma\to\tau)}([k_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_1)], [k_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_2)]). \\ \langle\, [k_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_1)] \,|\, \lceil f \rceil\rho \,\rangle \approx \langle\, [k_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_2)] \,|\, \lceil f \rceil\rho' \,\rangle\end{array}$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{rcl}\langle\, [k_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_1)] \,|\, \lceil f \rceil\rho \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, k_1 \,|\, f\rho \,|\, e_1 \,\rangle \\ \langle\, [k_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_2)] \,|\, \lceil f \rceil\rho' \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, k_2 \,|\, f\rho' \,|\, e_2 \,\rangle\end{array}$$

となり、これは (f) の帰納法の仮定より成り立つ。

(iv)

$$\Gamma \vdash n : \mathsf{int} \quad (\text{TInt})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (e) について $R^{e}_{+\mathsf{int}}(n\rho, n\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (1) より

$$\forall R^{k}_{\neg\mathsf{int}}(\bullet, \bullet).\langle\, \bullet \,|\, n\rho \,\rangle \approx \langle\, \bullet \,|\, n\rho' \,\rangle$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{rcccl}\langle\, \bullet \,|\, n\rho \,\rangle & = & \langle\, \bullet \,|\, n \,\rangle & \rightsquigarrow & n \\ \langle\, \bullet \,|\, n\rho' \,\rangle & = & \langle\, \bullet \,|\, n \,\rangle & \rightsquigarrow & n\end{array}$$

となり、命題を満たす。

(v)

$$\frac{\Gamma \vdash k : \neg\tau \quad \Gamma \vdash e : +\sigma}{\Gamma \vdash [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k \downarrow f_y) \uparrow e] : +(\sigma - \tau)}\ (\mathrm{TContext_n})$$

の場合。帰納法の仮定より。定理 (e) について $R^e_{+(\sigma-\tau)}([(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k \downarrow f_y) \uparrow e]\rho, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k \downarrow f_y) \uparrow e]\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (1) より

$$\forall R^k_{\neg(\sigma-\tau)}(\lfloor f_1 \rfloor, \lfloor f_2 \rfloor).\langle\, \lfloor f_1 \rfloor \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k \downarrow f_y) \uparrow e]\rho \,\rangle \approx \langle\, \lfloor f_2 \rfloor \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k \downarrow f_y) \uparrow e]\rho' \,\rangle$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{rcl}\langle\, \lfloor f_1 \rfloor \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k \downarrow f_y) \uparrow e]\rho \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, k\rho \,|\, f_1 \,|\, e\rho \,\rangle \\ \langle\, \lfloor f_2 \rfloor \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k \downarrow f_y) \uparrow e]\rho' \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, k\rho' \,|\, f_2 \,|\, e\rho' \,\rangle\end{array}$$

となり、さらに $\forall R^k_{\neg(\sigma-\tau)}(\lfloor f_1 \rfloor, \lfloor f_2 \rfloor) \Leftrightarrow \forall R^f_{\{^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}(f_1, f_2)$ が成り立つので、定義 (2) から $\forall R^e_{+\sigma}(e\rho, e\rho')$ および $\forall R^k_{\neg\tau}(k\rho, k\rho')$ を示せばよく、これらは (e)(k) の帰納法の仮定より成り立つ。

(f) を証明する。

(i)

$$\frac{\Gamma \vdash e : +(\sigma \to \tau)}{\Gamma \vdash \overline{e} : \{^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}\ (\mathrm{TCloFun})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (f) について $R^f_{\{^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}(\overline{e}\rho, \overline{e}\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (2) より

$$\forall R^e_{+\sigma}(e_1, e_2).\forall R^k_{\neg\tau}(k_1, k_2).\langle\, k_1 \,|\, \overline{e}\rho \,|\, e_1 \,\rangle \approx \langle\, k_1 \,|\, \overline{e}\rho' \,|\, e_2 \,\rangle$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{rcl}\langle\, k_1 \,|\, \overline{e}\rho \,|\, e_1 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, [k_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_1)] \,|\, e\rho \,\rangle \\ \langle\, k_2 \,|\, \overline{e}\rho' \,|\, e_2 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, [k_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_2)] \,|\, e\rho' \,\rangle\end{array}$$

となり、これは (e) の帰納法の仮定より

$$\forall R^k_{\neg(\sigma\to\tau)}([k_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_1)], [k_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_2)])$$

を示せばよい。
これを示すには定義 (4”) より

$$R^f_{\{^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}(f_1, f_2).\langle\, k_1 \,|\, f_1 \,|\, e_1 \,\rangle \approx \langle\, k_2 \,|\, f_2 \,|\, e_2 \,\rangle$$

を示せばよく、これは定義 (3) の R^f の関係性より成り立つ。

(ii)

$$\frac{\Gamma, x : +\sigma \vdash e : +\tau}{\Gamma \vdash x \Rightarrow e : \{^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma}} \ (\mathrm{TFun})$$

の場合。
帰納法の仮定より、定理 (f) について $R^f_{\{^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}((x \Rightarrow e)\rho, (x \Rightarrow e)\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (2) より

$$\forall R^e_{+\sigma}(e_1, e_2).\forall R^k_{\neg\tau}(k_1, k_2).\langle\, k_1 \,|\, (x \Rightarrow e)\rho \,|\, e_1 \,\rangle \approx \langle\, k_2 \,|\, (x \Rightarrow e)\rho' \,|\, e_2 \,\rangle$$

を示す。

$$\begin{array}{rcl} \langle\, k_1 \,|\, (x \Rightarrow e)\rho \,|\, e_1 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, k_1 \,|\, e\rho[e_1/x] \,\rangle \\ \langle\, k_2 \,|\, (x \Rightarrow e)\rho' \,|\, e_2 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, k_2 \,|\, e\rho'[e_2/x] \,\rangle \end{array}$$

となり、(e) の帰納法の仮定より成り立つ。

(iii)

$$\frac{\Gamma, y : \neg\tau \vdash \neg c : \sigma}{\Gamma \vdash y \Leftarrow c : \{^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma}} \ (\overline{\mathrm{TFun}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (f) について $R^f_{\{^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}((y \Leftarrow c)\rho, (y \Leftarrow c)\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (2) より

$$\forall R^e_{+\sigma}(e_1, e_2).\forall R^k_{\neg\tau}(k_1, k_2).\langle\, k_1 \,|\, (y \Leftarrow c)\rho \,|\, e_1 \,\rangle \approx \langle\, k_2 \,|\, (y \Rightarrow c)\rho' \,|\, e_2 \,\rangle$$

を示す。

$$\begin{array}{rcl} \langle\, k_1 \,|\, (y \Leftarrow c)\rho \,|\, e_1 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c\rho[k_1/y] \,|\, e_1 \,\rangle \\ \langle\, k_2 \,|\, (y \Leftarrow c)\rho' \,|\, e_2 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c\rho'[k_2/y] \,|\, e_2 \,\rangle \end{array}$$

となり、(c) の帰納法の仮定より成り立つ。

(vi)

$$\frac{\Gamma \vdash c : \neg(\sigma - \tau)}{\Gamma \vdash \underline{c} : \{^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma}} \ (\overline{\mathrm{TCloFun}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (f) について $R^f_{\{^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma}}(\underline{c}\rho, \underline{c}\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (2) より

$$\forall R^e_{+\sigma}(e_1, e_2).\forall R^k_{\neg\tau}(k_1, k_2).\langle\, k_1 \,|\, \underline{c}\rho \,|\, e_1 \,\rangle \approx \langle\, k_1 \,|\, \underline{c}\rho' \,|\, e_2 \,\rangle$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{rcl} \langle\, k_1 \,|\, \underline{c}\rho \,|\, e_1 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c\rho \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k_1 \downarrow f_y) \uparrow e_1] \,\rangle \\ \langle\, k_2 \,|\, \underline{c}\rho' \,|\, e_2 \,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c\rho' \,|\, [(\lfloor f_y \rfloor \Leftarrow k_2 \downarrow f_y) \uparrow e_2] \,\rangle \end{array}$$

となり、これは (c) の帰納法の仮定より

$$\forall R^{e}_{+(\sigma-\tau)}([(\lfloor f_y\rfloor \Leftarrow k_1 \downarrow f_y) \uparrow e_1], [(\lfloor f_y\rfloor \Leftarrow k_2 \downarrow f_y) \uparrow e_2])$$

を示せば良い。

これを示すには、定義 (1) より

$$\forall R^{k}_{\neg(\sigma-\tau)}(\lfloor f_1\rfloor, \lfloor f_2\rfloor).\langle\, \lfloor f_1\rfloor \,|\, [(\lfloor f_y\rfloor \Leftarrow k_1 \downarrow f_y) \uparrow e_1]\,\rangle \approx \langle\, \lfloor f_2\rfloor \,|\, [(\lfloor f_y\rfloor \Leftarrow k_1 \downarrow f_y) \uparrow e_1]\,\rangle$$

を示す。

$$\begin{array}{lll} \langle\, \lfloor f_1\rfloor \,|\, [(\lfloor f_y\rfloor \Leftarrow k_1 \downarrow f_y) \uparrow e_1]\,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, k_1 \,|\, f_1 \,|\, e_1\,\rangle \\ \langle\, \lfloor f_2\rfloor \,|\, [(\lfloor f_y\rfloor \Leftarrow k_2 \downarrow f_y) \uparrow e_2]\,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, k_2 \,|\, f_2 \,|\, e_2\,\rangle \end{array}$$

となり、これは定義 (2) の R^f の関係性より成り立つ。

(c) を証明する。

$$\frac{\Gamma \vdash f : \{ {}^{+\sigma\to+\tau}_{\neg\tau\to\neg\sigma} \quad \Gamma \vdash c : \neg\tau}{\Gamma \vdash c \downarrow f : \neg\sigma} \ (\overline{\text{TApp}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (c) について $R^{c}_{\neg\sigma}((c \downarrow f)\rho, (c \downarrow f)\rho')$ を示す。

これを示すには、定義 (3) より

$$\forall R^{e}_{+\sigma}(e_1, e_2).\langle\, (c \downarrow f)\rho \,|\, e_1\,\rangle \approx \langle\, (c \downarrow f)\rho' \,|\, e_2\,\rangle$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{lllll} \langle\, (c \downarrow f)\rho \,|\, e_1\,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c\rho \,|\, f\rho \,|\, e_1\,\rangle & \approx & \langle\, c\rho \,|\, f\rho \uparrow e_1\,\rangle \\ \langle\, (c \downarrow f)\rho' \,|\, e_2\,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, c\rho' \,|\, f\rho' \,|\, e_2\,\rangle & \approx & \langle\, c\rho' \,|\, f\rho' \uparrow e_2\,\rangle \end{array}$$

となり、これは (c) の帰納法の仮定より $\forall R^{e}_{+\tau}(f\rho \uparrow e_1, f\rho' \uparrow e_2)$ を示せば良い。

これを示すには定義 (1) より

$$\forall R^{k}_{\neg\tau}(k_1, k_2).\langle\, k_1 \,|\, f\rho \uparrow e_1\,\rangle \approx \langle\, k_2 \,|\, f\rho' \uparrow e_2\,\rangle$$

を示せば良い。

$$\begin{array}{lll} \langle\, k_1 \,|\, f\rho \uparrow e_1\,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, k_1 \,|\, f\rho \,|\, e_1\,\rangle \\ \langle\, k_2 \,|\, f\rho' \uparrow e_2\,\rangle & \rightsquigarrow & \langle\, k_2 \,|\, f\rho' \,|\, e_2\,\rangle \end{array}$$

となり、これは (f) の帰納法の仮定より成り立つ。

(k) を証明する。

(i)

$$\Gamma, y : \neg\tau \vdash y : \neg\tau \quad (\overline{\text{TVar}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (k) について $R^{k}_{\neg\tau}(y\rho, y\rho')$ を示す。

これは環境より $y\rho[k/y] = k$ および $y\rho'[k'/y] = k'$ となり、さらに仮定より $R^{k}_{\neg\sigma}(k, k')$ となるので、成り立つ。

(ii)

$$\frac{\Gamma \vdash f : \{{}^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma}}{\Gamma \vdash \lfloor f \rfloor : \neg(\sigma - \tau)}\ (\overline{\text{TFunClo}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (k) について $R^k_{\neg(\sigma-\tau)}(\lfloor f \rfloor\rho, \lfloor f \rfloor\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (4') より

$$\forall R^f_{\{{}^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma}}(f\rho, f\rho')$$

を示せばよく、これは (f) の帰納法の仮定より成り立つ。

(iii)

$$\Gamma \vdash \bullet : \neg\mathsf{int}\quad (\overline{\text{TInt}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (k) について $R^k_{\neg\mathsf{int}}(\bullet\rho, \bullet\rho')$ を示す。
これは $\bullet\rho = \bullet$ および　$\bullet\rho' = \bullet$　となり、定義 (4) より $R^k_{\neg\mathsf{int}}(\bullet, \bullet)$ が成り立つので、命題を満たす。

(iv)

$$\frac{\Gamma \vdash k : \neg\tau \quad \Gamma \vdash e : +\sigma}{\Gamma \vdash [k \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)] : \neg(\sigma \to \tau)}\ (\overline{\text{Context}_{\text{n}}})$$

の場合。帰納法の仮定より、定理 (k) について $R^k_{\neg(\sigma\to\tau)}([k \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)]\rho, [k \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e)]\rho')$ を示す。
これを示すには、定義 (4') より

$$\forall R^f_{\{{}^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma}}(f_1, f_2).\langle\, k\rho \,|\, f_1 \,|\, e\rho \,\rangle \approx \langle\, k\rho' \,|\, f_2 \,|\, e\rho' \,\rangle$$

を示せば良い。
$\forall R^f_{\{{}^{+\sigma \to +\tau}_{\neg\tau \to \neg\sigma}}(f_1, f_2)$ から、さらに定義 (2) より $\forall R^e_{+\sigma}(e\rho, e\rho')$ と $\forall R^k_{\neg\tau}(k\rho, k\rho')$ を示せばよく、これは (e)(k) の帰納法の仮定より成り立つ。

以上より定理は成り立つ。 □

論理関係の基本定理において同等の式であることの証明

定理 A.1.20 の最後の部分の証明

以下のふたつの式

1. $\langle\, \bullet \,|\, \alpha \Rightarrow T_e[\![M]\!] \,|\, \lceil\_ \Leftarrow [T_c[\![E]\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![N]\!])] \rceil \,\rangle$（最後から 2 行目）

2. $\langle \bullet \,|\, T_e\llbracket M \rrbracket [\lceil x' \Rightarrow (\overline{\lceil \_ \Leftarrow T_c\llbracket E \rrbracket \rceil} \uparrow (\overline{x'} \uparrow T_e\llbracket N \rrbracket))\rceil/\alpha] \,\rangle$

と

1. $\langle \bullet \,|\, \alpha \Rightarrow T_e\llbracket M \rrbracket \,|\, \lceil \_ \Leftarrow \bullet \rceil \,\rangle$ （最後から 2 行目）
2. $\langle \bullet \,|\, T_e\llbracket M \rrbracket [\lceil x \Rightarrow (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil \_ \Rightarrow x \rceil\rceil/\alpha] \,\rangle$

が、それぞれ同じ値に落ちることを証明する。形を合わせるため、それぞれのふたつ目の式をひとつ引き戻して、

1. $\langle \bullet \,|\, \alpha \Rightarrow T_e\llbracket M \rrbracket \,|\, \lceil \_ \Leftarrow [T_c\llbracket E \rrbracket \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e\llbracket N \rrbracket)]\rceil \,\rangle$
2. $\langle \bullet \,|\, \alpha \Rightarrow T_e\llbracket M \rrbracket \,|\, \lceil x' \Rightarrow (\overline{\lceil \_ \Leftarrow T_c\llbracket E \rrbracket \rceil} \uparrow (\overline{x'} \uparrow T_e\llbracket N \rrbracket))\rceil \,\rangle$

と

1. $\langle \bullet \,|\, \alpha \Rightarrow T_e\llbracket M \rrbracket \,|\, \lceil \_ \Leftarrow \bullet \rceil \,\rangle$
2. $\langle \bullet \,|\, \alpha \Rightarrow T_e\llbracket M \rrbracket \,|\, \lceil x \Rightarrow (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil \_ \Rightarrow x \rceil\rceil \,\rangle$

が、それぞれ同じ値に落ちることを証明する。

証明

いずれも、式変形を始める最初の式は仮定から型がついているので、Preservation の性質と、下に示す補題 補題 A.2.9 から上記の 1 の式はいずれも型がついているので、$\alpha \Rightarrow T_e\llbracket M \rrbracket$ にも型がついている。

$\alpha \Rightarrow T_e\llbracket M \rrbracket$ の型は、$\bullet$ が $\neg\mathsf{int}$ 型であり項部分が関数の形なので、最初の 1 の式は $\left\{\substack{+(\tau\to\alpha)\to+\mathsf{int} \\ \neg\mathsf{int}\to\neg(\tau\to\alpha)}\right.$ という形、ふたつ目の 1 の式は $\left\{\substack{+(\mathsf{int}\to\alpha)\to+\mathsf{int} \\ \neg\mathsf{int}\to\neg(\mathsf{int}\to\alpha)}\right.$ という形をしているはずである。

型付けをメモ代わりに記す。

最初の 1 の式の型

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \_ : \neg\alpha \vdash [T_c\llbracket E \rrbracket \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e\llbracket N \rrbracket)] : \neg\tau}{\Gamma \vdash \_ \Leftarrow [T_c\llbracket E \rrbracket \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e\llbracket N \rrbracket)] : \left\{\substack{+\tau\to+\alpha \\ \neg\alpha\to\neg\tau}\right.}}{\Gamma \vdash \lceil \_ \Leftarrow [T_c\llbracket E \rrbracket \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e\llbracket N \rrbracket)]\rceil : +(\tau \to \alpha)}$$

ふたつ目の 2 の式の型

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \_ : \neg\alpha \vdash \bullet : \neg\mathsf{int}}{\Gamma \vdash \_ \Leftarrow \bullet : \left\{\substack{+\mathsf{int}\to+\alpha \\ \neg\alpha\to\neg\mathsf{int}}\right.}}{\Gamma \vdash \lceil \_ \Leftarrow \bullet \rceil : +(\mathsf{int} \to \alpha)}$$

したがって、論理関係の基本定理 A.2.8 より $R^f_{\left\{\substack{+(\tau\to\alpha)\to+\mathsf{int} \\ \neg\mathsf{int}\to\neg(\tau\to\alpha)}\right.}(\alpha \Rightarrow T_e\llbracket M \rrbracket, \alpha \Rightarrow T_e\llbracket M \rrbracket)$ および $R^f_{\left\{\substack{+(\mathsf{int}\to\alpha)\to+\mathsf{int} \\ \neg\mathsf{int}\to\neg(\mathsf{int}\to\alpha)}\right.}(\alpha \Rightarrow T_e\llbracket M \rrbracket, \alpha \Rightarrow T_e\llbracket M \rrbracket)$ が成り立つ。今、$R^k_{\neg\mathsf{int}}(\bullet, \bullet)$ であるので、論理関係の定義 (2) より、それぞれ

1. $R^e_{+(\tau\to\alpha)}(\lceil \_ \Leftarrow [T_c[\![E]\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![N]\!])]\rceil, \lceil x' \Rightarrow (\overline{\lceil \_ \Leftarrow T_c[\![E]\!]\rceil} \uparrow (\overline{x'} \uparrow T_e[\![N]\!]))\rceil)$
2. $R^e_{+(\mathsf{int}\to\alpha)}(\lceil \_ \Leftarrow \bullet\rceil, \lceil x \Rightarrow (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil \_ \Leftarrow y\rceil)]) \uparrow \lceil \_ \Rightarrow x\rceil\rceil)$

が成り立てば、同じ値に落ちることがわかる。

まず 1 を示すために、定義 (1) より

$$\begin{aligned}
&R^k_{\neg(\tau\to\alpha)}([k_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_1)], [k_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_2)]).\\
&\langle\, [k_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_1)] \,|\, \lceil _ \Leftarrow [T_c[\![E]\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![N]\!])]\rceil \,\rangle\\
&\approx \langle\, [k_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_2)] \,|\, \lceil x' \Rightarrow (\overline{\lceil _ \Leftarrow T_c[\![E]\!]\rceil} \uparrow (\overline{x'} \uparrow T_e[\![N]\!]))\rceil \,\rangle
\end{aligned}$$

が成り立てば良い。

それぞれを与えられた $[k_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_1)], [k_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_2)]$ を用いて簡約を行うと

$$\begin{aligned}
&\langle\, [k_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_1)] \,|\, \lceil _ \Leftarrow [T_c[\![E]\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![N]\!])]\rceil \,\rangle\\
\rightsquigarrow\ &\langle\, k_1 \,|\, _ \Leftarrow [T_c[\![E]\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![N]\!])] \,|\, e_1 \,\rangle\\
\rightsquigarrow\ &\langle\, [T_c[\![E]\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![N]\!])] \,|\, e_1 \,\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle\, [k_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_2)] \,|\, \lceil x' \Rightarrow (\overline{\lceil _ \Leftarrow T_c[\![E]\!]\rceil} \uparrow (\overline{x'} \uparrow T_e[\![N]\!]))\rceil \,\rangle\\
\rightsquigarrow\ &\langle\, k_2 \,|\, x' \Rightarrow (\overline{\lceil _ \Leftarrow T_c[\![E]\!]\rceil} \uparrow (\overline{x'} \uparrow T_e[\![N]\!])) \,|\, e_2 \,\rangle\\
\rightsquigarrow\ &\langle\, k_2 \,|\, \overline{\lceil _ \Leftarrow T_c[\![E]\!]\rceil} \uparrow (\overline{e_2} \uparrow T_e[\![N]\!]) \,\rangle\\
\rightsquigarrow\ &\langle\, k_1 \,|\, \overline{\lceil _ \Leftarrow T_c[\![E]\!]\rceil} \,|\, \overline{e_2} \uparrow T_e[\![N]\!] \,\rangle\\
\rightsquigarrow\ &\langle\, [k_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow (\overline{e_2} \uparrow T_e[\![N]\!]))] \,|\, \lceil _ \Leftarrow T_c[\![E]\!]\rceil \,\rangle\\
\rightsquigarrow\ &\langle\, k_1 \,|\, _ \Leftarrow T_c[\![E]\!] \,|\, \overline{e_2} \uparrow T_e[\![N]\!] \,\rangle\\
\rightsquigarrow\ &\langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, \overline{e_2} \uparrow T_e[\![N]\!] \,\rangle\\
\rightsquigarrow\ &\langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, \overline{e_2} \,|\, T_e[\![N]\!] \,\rangle\\
\rightsquigarrow\ &\langle\, [T_c[\![E]\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![N]\!])] \,|\, e_2 \,\rangle
\end{aligned}$$

となる。

つぎに 2 を示すために、まず、定義 (1) より

$$\begin{aligned}
&R^k_{\neg(\mathsf{int}\to\alpha)}([k_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_1)], [k_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_2)]).\\
&\langle\, [k_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_1)] \,|\, \lceil _ \Leftarrow \bullet\rceil \,\rangle\\
&\approx \langle\, [k_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_2)] \,|\, \lceil x \Rightarrow (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil _ \Leftarrow y\rceil)]) \uparrow \lceil _ \Rightarrow x\rceil\rceil \,\rangle
\end{aligned}$$

が成り立てば良い。

それぞれを与えられた $[k_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_1)], [k_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_2)]$ を用いて簡約を行うと

$$\begin{aligned}
& \langle\, [k_1 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_1)] \,|\, \lceil _ \Leftarrow \bullet \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow\ & \langle\, k_1 \,|\, _ \Leftarrow \bullet \,|\, e_1 \,\rangle \\
\rightsquigarrow\ & \langle\, \bullet \,|\, e_1 \,\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle\, [k_2 \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow e_2)] \,|\, \lceil x \Rightarrow (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil _ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil _ \Rightarrow x \rceil \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow\ & \langle\, k_2 \,|\, x \Rightarrow (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil _ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil _ \Rightarrow x \rceil \,|\, e_2 \,\rangle \\
\rightsquigarrow\ & \langle\, k_2 \,|\, (y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil _ \Leftarrow y \rceil)]) \uparrow \lceil _ \Rightarrow e_2 \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow\ & \langle\, k_2 \,|\, y \Leftarrow [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil _ \Leftarrow y \rceil)] \,|\, \lceil _ \Rightarrow e_2 \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow\ & \langle\, [\bullet \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow \lceil _ \Leftarrow k_2 \rceil)] \,|\, \lceil _ \Rightarrow e_2 \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow\ & \langle\, \bullet \,|\, _ \Rightarrow e_2 \,|\, \lceil _ \Leftarrow k_2 \rceil \,\rangle \\
\rightsquigarrow\ & \langle\, \bullet \,|\, e_2 \,\rangle
\end{aligned}$$

となる。

以上より命題は成り立つ。 □

補題 A.2.9 $\vdash T[\![E[M]]\!] : +\mathsf{int}$ なら $\vdash \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \,\rangle : +\mathsf{int}$ である。

証明

E の構造に関する帰納法。

(1) $[\,]$ の場合。仮定から $\vdash T[\![M]\!] : +\mathsf{int}$。これより $\vdash \langle\, \bullet \,|\, T_e[\![M]\!] \,\rangle : +\mathsf{int}$。よって成り立つ。

(2) $E[F]$ の場合。仮定から $\vdash T[\![E[F[M]]]\!] : +\mathsf{int}$。これに帰納法の仮定を使うと $\vdash \langle\, T_c[\![E]\!] \,|\, T_e[\![F[M]]\!] \,\rangle : +\mathsf{int}$ である。よって (TProg1) を使うと、ある型 A について、(a) $\vdash T_c[\![E]\!] : \neg A$, (b) $\vdash T_e[\![F[M]]\!] : +A$ が両方、成り立っているはずである。

$F = [\,]\,N$ の形であるので、$T_e[\![F[M]]\!] = T_e[\![M\,N]\!] = T_f[\![M]\!] \uparrow T_e[\![N]\!]$。これを (b) に代入すると、ある型 B について

$$\frac{\vdash T_f[\![M]\!] : \{{}^{+B \to +A}_{\neg A \to \neg B} \qquad \vdash T_e[\![N]\!] : +B}{\vdash T_f[\![M]\!] \uparrow T_e[\![N]\!] : +A}\ (\mathrm{TApp})$$

となっていたはずである。(a) とこの推論の右側の子供を使うと

$$\frac{\vdash T_c[\![E]\!] : \neg A \quad \vdash T_e[\![N]\!] : +B}{\vdash [T_c[\![E]\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![N]\!])] : \neg(B \to A)}\ (\overline{\mathrm{TCon_n}})$$

が得られる。$[T_c[\![E]\!] \downarrow (\lceil f_x \rceil \Rightarrow f_x \uparrow T_e[\![N]\!])] = T_c[\![E[[\,]\,N]]\!] = T_c[\![E[F]]\!]$ であるので、$\vdash T_c[\![E[F]]\!] : \neg(B \to A)$ となる。一方、上の (TApp) の推論の左側の子供 $\vdash T_f[\![M]\!] : \{{}^{+B \to +A}_{\neg A \to \neg B}$ から $\vdash T_e[\![M]\!] : +(B \to A)$ であることが M に関する場合分けからわかる。したがって $\vdash \langle\, T_c[\![E[F]]\!] \,|\, T_e[\![M]\!] \,\rangle : +\mathsf{int}$ を得る。

以上より命題は成り立つ。 □